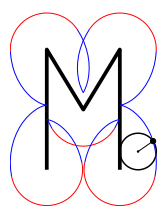
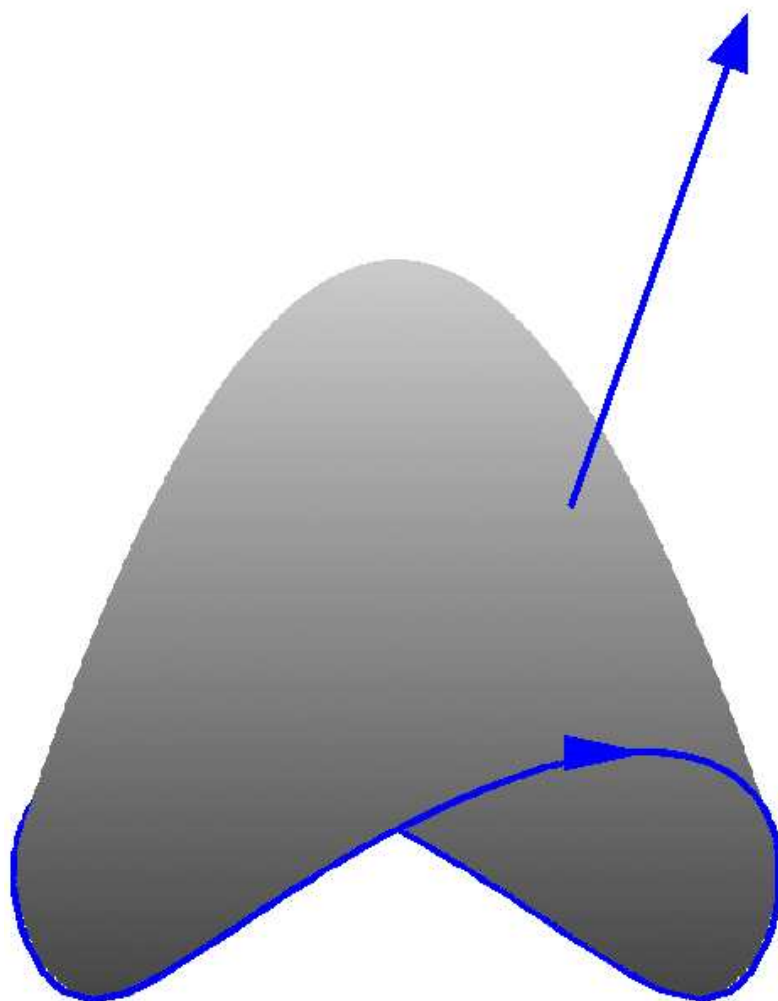


Mathematik–Online–Kurs

# VEKTORANALYSIS



<http://www.mathematik-online.org/>



# Mathematik–Online–Kurs

## VEKTORANALYSIS

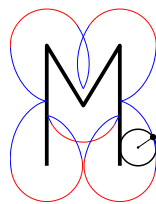
Stand: 12. Februar 2004

Konzipiert von K. Höllig unter Mitwirkung von A. App, J. Hörner  
und A. Much

© 2004 **Mathematik-Online**

Diese Veröffentlichung ist urheberrechtlich geschützt.

Weder Mathematik-Online noch einer der Autoren übernehmen Haftung für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität dieser Veröffentlichung. Haftungsansprüche, welche sich auf Schäden materieller oder ideeller Art beziehen, die durch die Nutzung oder Nichtnutzung der dargebotenen Informationen bzw. durch die Nutzung fehlerhafter und unvollständiger Informationen verursacht wurden, sind grundsätzlich ausgeschlossen.



<http://www.mathematik-online.org/>



## Vorwort

Diese Broschüre wurde im Rahmen des Projektes „Mathematik Online“ begleitend zu dem entsprechenden Kursmodul erstellt. Sie richtet sich an Studenten der Ingenieur- und Naturwissenschaften und ist insbesondere zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung geeignet.

An der Entwicklung des Kurses haben eine Reihe meiner Mitarbeiter und Studenten mitgewirkt. Ich danke insbesondere J. Hörner für die technische Leitung sowie A. App, J. Hörner, und A. Much für die Ausarbeitung der mathematischen Grundlagen.

Die gemeinsame Arbeit an dem Projekt hat mir viel Freude bereitet, und ich wünsche den Lesern viel Spaß mit „Mathematik Online“ und Erfolg in ihrem Studium.

Stuttgart, im November 2003

Klaus Höllig



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Differentiation</b>	<b>11</b>
1.1	Skalar- und Vektorfelder	11
1.1.1	Skalarfeld	11
1.1.2	Vektorfunktion	13
1.1.3	Vektorfeld	14
1.1.4	Visualisierung von Vektorfeldern mit MATLAB	14
1.1.5	Vektorfelder in Polarkoordinaten	15
1.1.6	Quellen und Wirbel	16
1.1.7	Vektorfelder in Zylinderkoordinaten	17
1.1.8	Umrechnung zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten	18
1.1.9	Vektorfelder in Kugelkoordinaten	18
1.1.10	Umrechnung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten	19
1.2	Differentialoperatoren	20
1.2.1	Gradient eines Skalarfeldes	20
1.2.2	Gradient eines Vektorfeldes	20
1.2.3	Divergenz	20
1.2.4	Rotation	21
1.2.5	Laplace-Operator	23
1.2.6	Rechenregeln für Differentialoperatoren erster Ordnung	23
1.2.7	Aufgaben	25
1.2.8	Interaktive Aufgaben	25
1.3	Koordinatentransformation	26
1.3.1	Transformation von Differentialoperatoren	26
1.3.2	Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten	27
1.3.3	Axialsymmetrische Skalarfelder und Vektorfelder	27
1.3.4	Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten	28
1.3.5	Radialsymmetrische Skalarfelder und Vektorfelder	29
1.3.6	Aufgaben	30
<b>2</b>	<b>Integration</b>	<b>31</b>
2.1	Kurvenintegrale	31
2.1.1	Kurvenintegral für Skalarfelder	31
2.1.2	Weg	31
2.1.3	Arbeitsintegral	32
2.1.4	Geradliniger Weg	34
2.1.5	Spulenwindung	34
2.1.6	Vektorielltes Kurvenintegral	35
2.1.7	Aufgaben	35
2.1.8	Interaktive Aufgaben	37

2.2	Flächenintegrale . . . . .	37
2.2.1	Flächenintegral für Skalarfelder . . . . .	37
2.2.2	Flussintegral . . . . .	38
2.2.3	Fluss durch einen Funktionsgraph . . . . .	39
2.2.4	Fluss eines konstanten Vektorfeldes durch eine Ebene . . . . .	40
2.2.5	Fluss durch einen Zylindermantel . . . . .	41
2.2.6	Fluss durch Rotationsfläche . . . . .	43
2.2.7	Fluss durch eine Sphäre . . . . .	43
2.2.8	Senkrechte Stömung durch Halbkugelschale . . . . .	44
2.2.9	Fluss eines axialsymmetrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche . . . . .	44
2.2.10	Vektoriellcs Flächenintegral . . . . .	45
2.2.11	Aufgaben . . . . .	45
2.2.12	Interaktive Aufgaben . . . . .	46
2.3	Gauß'sche Integralsätze . . . . .	47
2.3.1	Orientierter Rand eines ebenen Bereichs . . . . .	47
2.3.2	Gauß'scher Integralsatz . . . . .	48
2.3.3	Integralsatz von Gauß bei einem radialen Feld . . . . .	49
2.3.4	Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß . . . . .	49
2.3.5	Varianten des Gauß'schen Integralsatzes . . . . .	50
2.3.6	Koordinatenfreie Definition der Divergenz . . . . .	51
2.3.7	Quellenfreie Felder . . . . .	51
2.3.8	Koordinatenfreie Definition des Gradienten . . . . .	51
2.3.9	Elektrostatiscbes Feld . . . . .	51
2.3.10	Gauß'scher Integralsatz in der Ebene . . . . .	53
2.3.11	Flächenberechnung mit dem Gauß'schen Integralsatz . . . . .	55
2.3.12	Aufgaben . . . . .	55
2.3.13	Interaktive Aufgaben . . . . .	56
2.4	Green'sche Integralsätze . . . . .	57
2.4.1	Erster Green'scher Integralsatz . . . . .	57
2.4.2	Zweiter Green'scher Integralsatz . . . . .	58
2.4.3	Aufgaben . . . . .	58
2.4.4	Interaktive Aufgaben . . . . .	59
2.5	Integralsatz von Stokes . . . . .	59
2.5.1	Satz von Stokes in der Ebene . . . . .	59
2.5.2	Singuläres wirbelfreies Feld . . . . .	60
2.5.3	Satz von Stokes . . . . .	61
2.5.4	Kreisförmige Strömung . . . . .	64
2.5.5	Koordinatenfreie Definition der Rotation . . . . .	64
2.5.6	Variante des Integralsatzes von Stokes . . . . .	66
2.5.7	Wirbelfreie Felder . . . . .	66
2.5.8	Aufgaben . . . . .	67
2.5.9	Interaktive Aufgaben . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Potentialtheorie</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1	Skalares Potential . . . . .	71
3.1.1	Potential eines Gradientenfeldes . . . . .	71
3.1.2	Potential eines radialen Feldes . . . . .	73
3.1.3	Existenz eines Potentials . . . . .	73
3.1.4	Integrabilitätsbedingung . . . . .	75

3.1.5	Konstruktion eines Potentials	76
3.1.6	Hakenintegral	78
3.1.7	Aufgaben	79
3.1.8	Interaktive Aufgaben	81
3.2	Vektorpotential	82
3.2.1	Vektorpotential	82
3.2.2	Existenz eines Vektorpotentials	82
3.2.3	Konstruktion eines Vektorpotentials	83
3.2.4	Vektorpotential eines zweidimensionalen Feldes	84
3.2.5	Aufgaben	85
3.3	Hauptsatz	85
3.3.1	Poisson-Gleichung im Raum	85
3.3.2	Hauptsatz der Vektoranalysis	85



# Kapitel 1

## Differentiation

### 1.1 Skalar- und Vektorfelder

#### 1.1.1 Skalarfeld

Ein Skalarfeld

$$P \mapsto U(P)$$

ordnet jedem Punkt  $P$  des Definitionsbereiches  $D$  eine reelle Zahl  $U$  zu. Alternative Schreibweisen sind

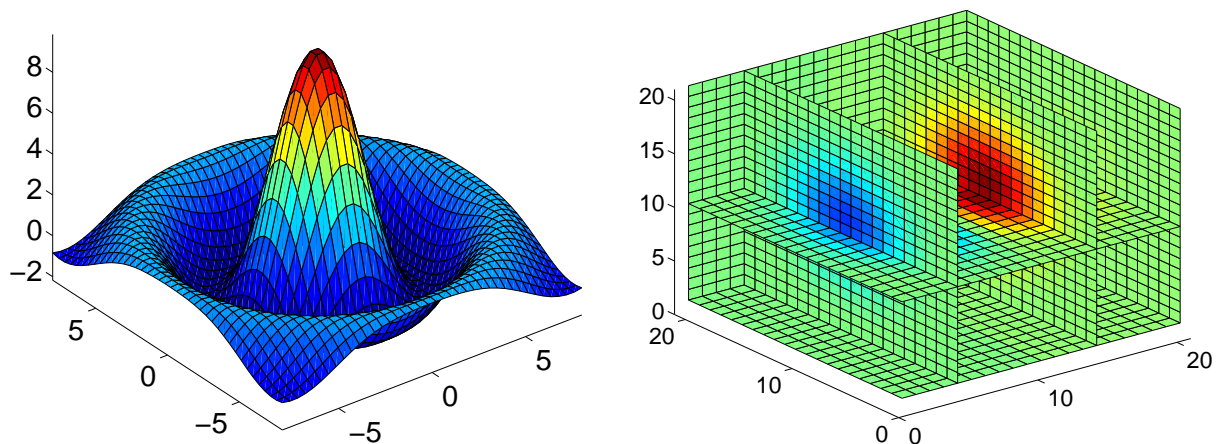
$$U = U(x, y, z) = U(\vec{r}),$$

wobei  $(x, y, z)$  die Koordinaten und  $\vec{r}$  der Ortsvektor von  $P$  sind. Zur Visualisierung können die Niveaumengen

$$U(x, y, z) = \text{const}$$

verwendet werden, und für ebene Skalarfelder auch der Graph

$$z = U(x, y), \quad (x, y) \in D.$$



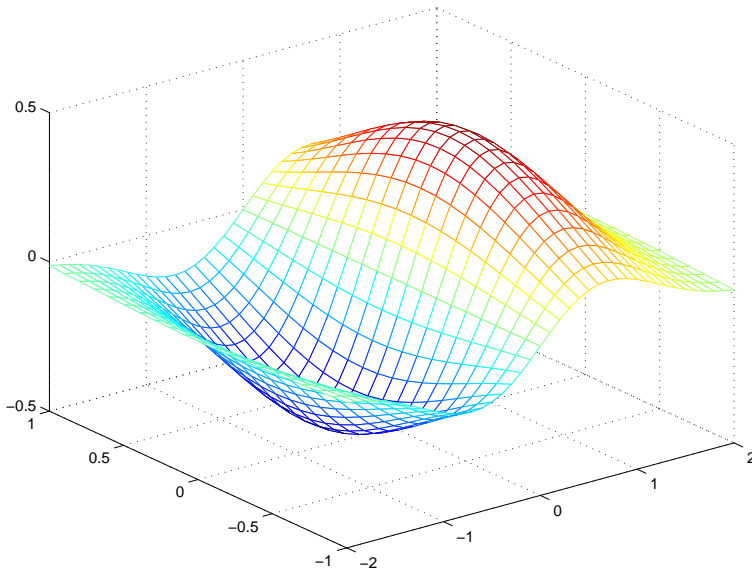
Die linke Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$z = U(x, y) = \frac{10 \sin r}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

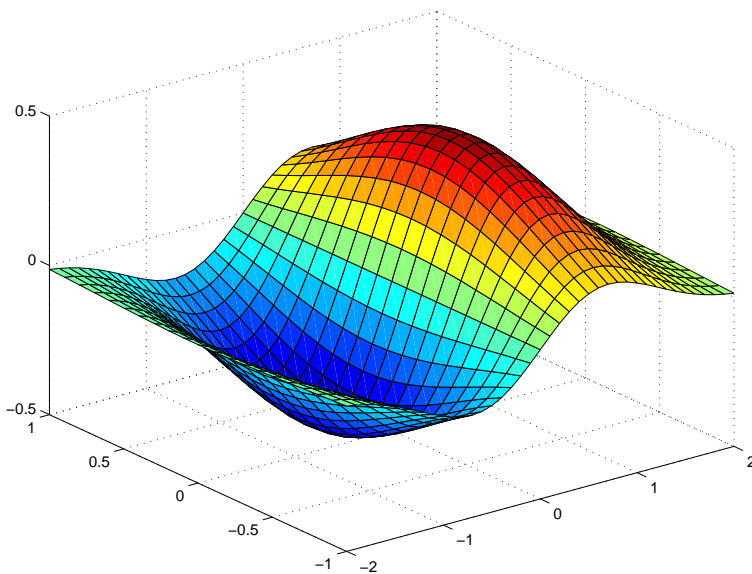
In der rechten Abbildung ist die Funktion  $U(x, y, z) = x \exp(-(x^2 + y^2 + z^2))$  durch farbliche Kennzeichnung ihrer Werte auf den Ebenen  $x = 5, x = 15, x = 21, y = 21, z = 1$  und  $z = 10$  dargestellt.

**Beispiel:**

```
>> [X,Y]=meshgrid(-2:.1:2,-1:.1:1);  
>> Z=X.*exp(-X.^2-Y.^2);  
  
>> mesh(X,Y,Z);
```

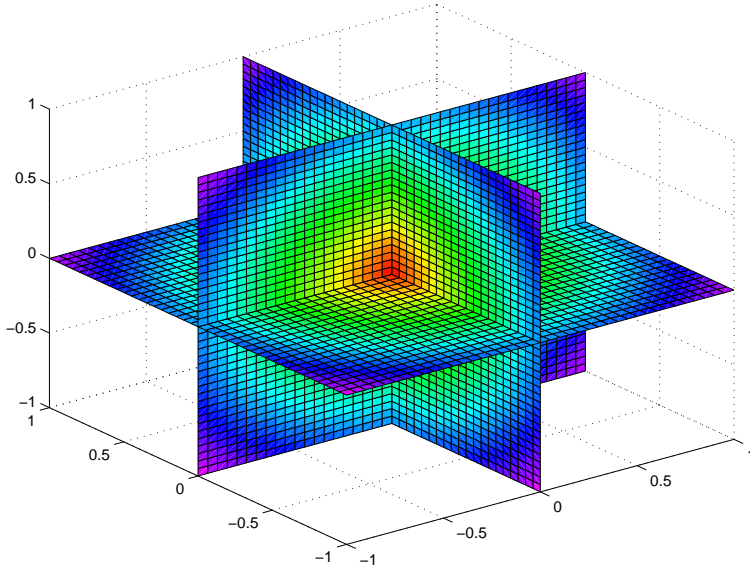


```
>> surf(X,Y,Z);
```

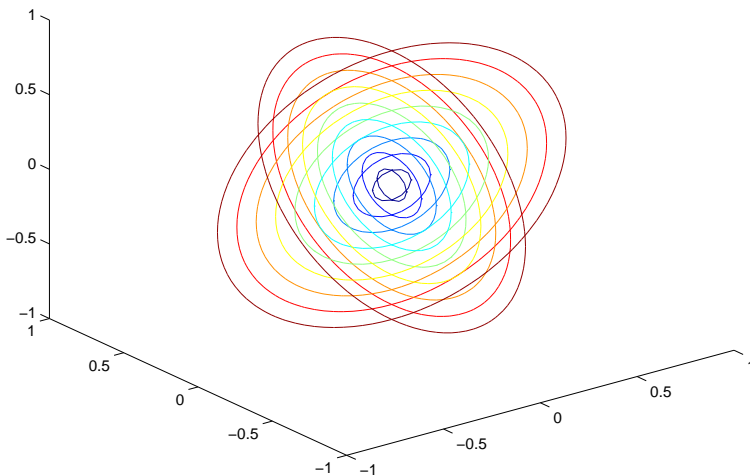


**Beispiel:**

```
>> [X,Y,Z]=meshgrid(-1:.05:1);
>> V=sqrt(X.^2+Y.^2+Z.^2);
>> slice(X,Y,Z,V,0,0,0)
>> colormap(hsv)
```



```
>> V(V>1)=NaN;
>> colormap(jet);
>> contourslice(X,Y,Z,V,0,0,[])
>> view(3)
```

**1.1.2 Vektorfunktion**

Eine Vektorfunktion

$$t \mapsto \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$$

ordnet einer skalaren Variablen  $t$  einen Vektor  $\vec{a}(t)$  zu. Die Komponenten in kartesischen Koordinaten werden mit  $a_x, a_y, a_z$  bezeichnet.

### 1.1.3 Vektorfeld

Ein Vektorfeld

$$P \mapsto \vec{F}(P)$$

ordnet einem Punkt  $P$  des Definitionsbereichs  $D$  einen Vektor  $\vec{F}$  zu. Alternative Schreibweisen sind

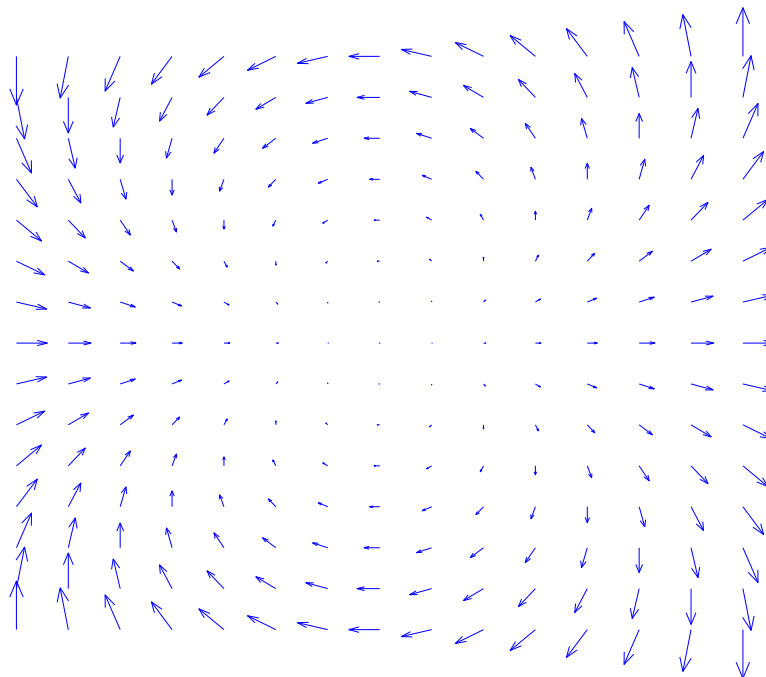
$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r}),$$

wobei  $(x, y, z)$  die Koordinaten und  $\vec{r}$  der Ortsvektor von  $P$  sind.

Die Komponenten von  $\vec{F}$  bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werden mit  $(F_x, F_y, F_z)$  bezeichnet:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z.$$

Zur Visualisierung können Richtungsfelder oder Feldlinien verwendet werden.



Bei einem Richtungsfeld werden die Vektoren  $\vec{F}(P)$  mit dem Punkt  $P$  in Form von Pfeilen  $P \rightarrow P + \vec{F}$  assoziiert. Feldlinien sind Kurven, die in jedem Punkt tangential zu dem Richtungsfeld sind.

### 1.1.4 Visualisierung von Vektorfeldern mit MATLAB

Mit dem folgenden Programm kann das Vektorfeld, das der Ableitung der Funktion

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

entspricht, visualisiert werden:

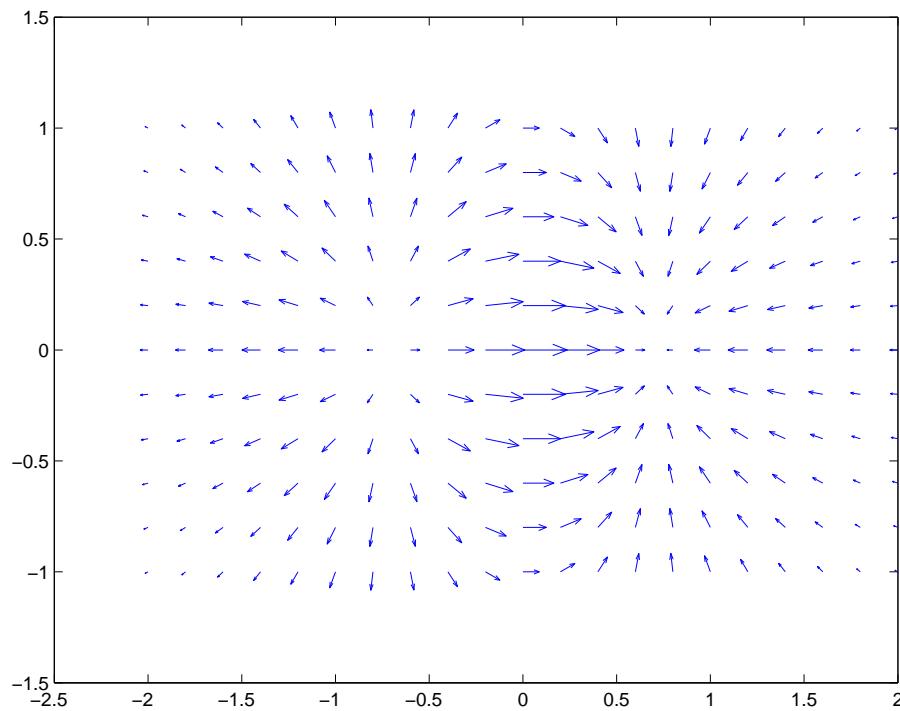
```
% X- und Y-Intervalle angeben
IX = linspace(-2,2,40);
IY = linspace(-1,1,20);
% Definitionsbereich in ein Netz unterteilen
[X,Y] = meshgrid(IX,IY);
```

```

% Funktion an den Stellen auswerten
F = X.* exp(-X.^2 - Y.^2);
% Vektorfeld der Ableitung berechnen
[DX,DY] = gradient(F,.2,.2);
% und ausgeben
quiver(X,Y,DX,DY);

```

Erzeugte Grafik:



### 1.1.5 Vektorfelder in Polarkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

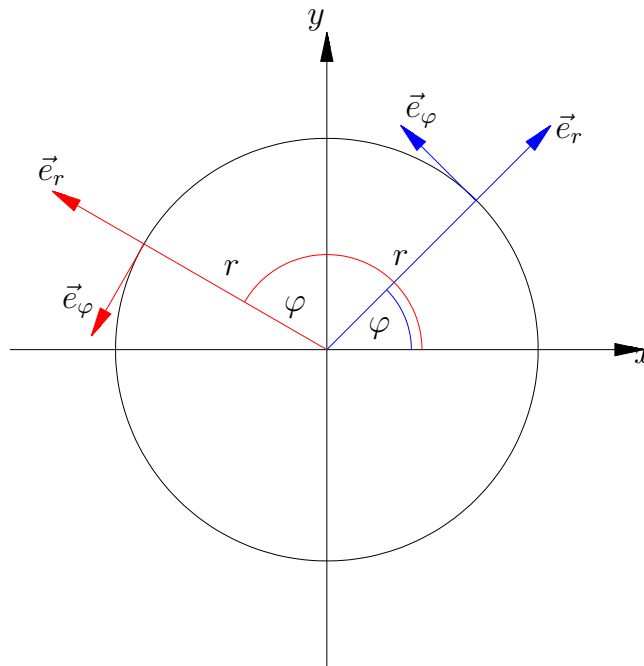
$$\vec{F}(x, y) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

die Darstellung

$$F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$

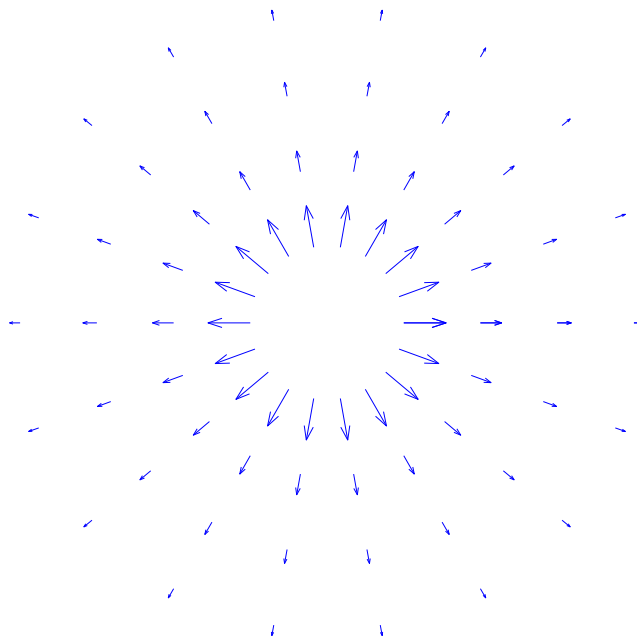


### 1.1.6 Quellen und Wirbel

Das Vektorfeld einer typischen Quelle hat die Form

$$\vec{F}(r, \varphi) = f(r)\vec{e}_r,$$

wobei die Funktion  $f$  die Stärke des Feldes im Abstand  $r$  vom Ursprung beschreibt.

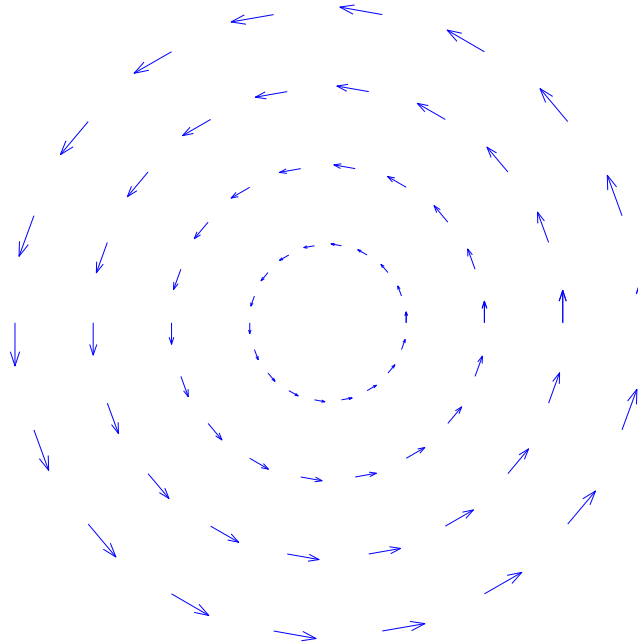


Für das abgebildete Beispiel ist  $f(r) = 1/r$ , d.h.

$$\vec{F}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \varphi \\ \frac{1}{r} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend hat das Vektorfeld eines typischen Wirbels die Form

$$\vec{F}(r, \varphi) = f(r)\vec{e}_\varphi.$$



Für das abgebildete Beispiel ist

$$\vec{F}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

### 1.1.7 Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$$

bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

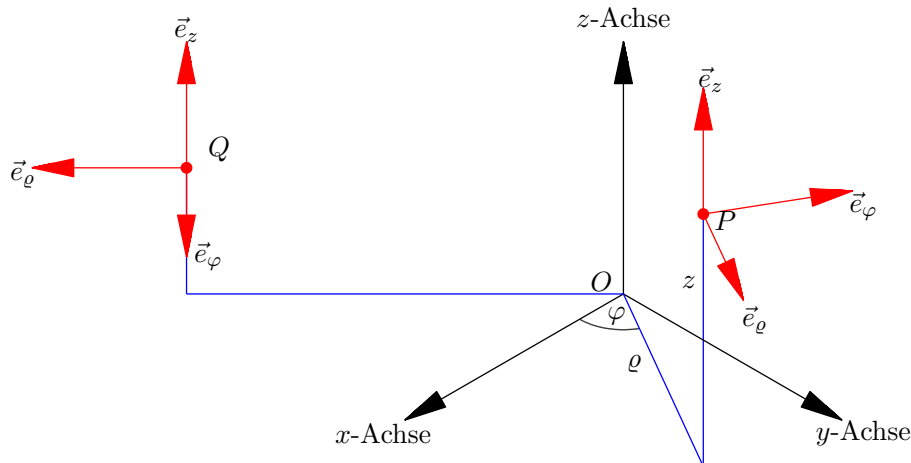
$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



### 1.1.8 Umrechnung zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten

Das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

besitzt in Zylinderkoordinaten die Darstellung

$$\vec{F}(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho + \varrho z \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z.$$

Dies ist unmittelbar aus der Definition der Basisvektoren ersichtlich. Verwendet man die allgemeine Formel, so folgt ebenfalls

$$F_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho,$$

sowie  $F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi = \varrho z$ . Die  $z$ -Komponente bleibt unverändert.

Das Vektorfeld  $\varrho \vec{e}_\varrho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$  besitzt in kartesischen Koordinaten die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \sin \varphi \\ \varrho \sin \varphi + \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

die man durch Einsetzen der Koordinaten der Basisvektoren gewinnt.

### 1.1.9 Vektorfelder in Kugelkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

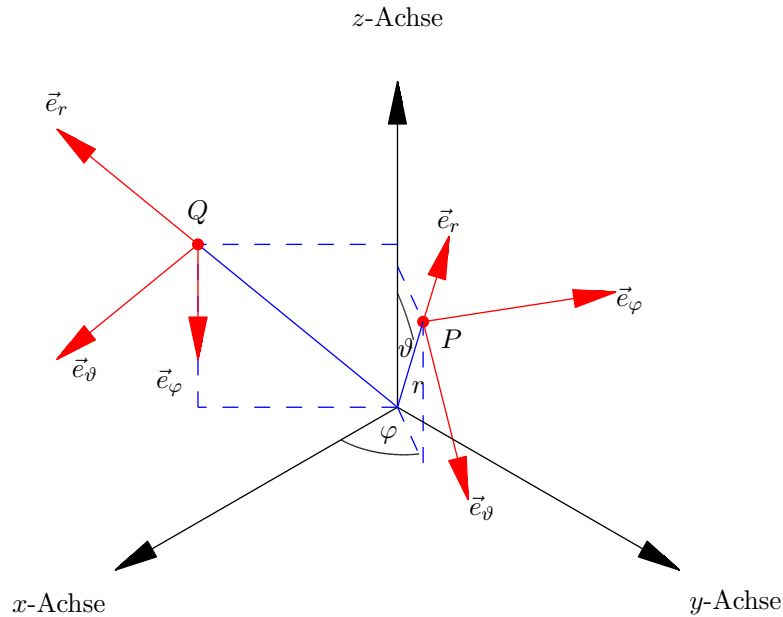
$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



### 1.1.10 Umrechnung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten

Das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

besitzt in Kugelkoordinaten die Darstellung:

$$\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta - r \sin \varphi \sin \vartheta r \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta + r \cos \varphi \sin \vartheta r \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} = r \vec{e}_r + r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \vec{e}_\varphi.$$

Dies ist unmittelbar aus der Definition der Basisvektoren ersichtlich.

Das Vektorfeld  $r \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\varphi$  besitzt in kartesischen Koordinaten die Darstellung

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \\ r \sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} zx - y \\ zy + x \\ -(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

die man durch Einsetzen der Koordinaten der Basisvektoren gewinnt.

## 1.2 Differentialoperatoren

### 1.2.1 Gradient eines Skalarfeldes

Der Gradient eines Skalarfeldes  $U(x, y, z)$  wird durch

$$\text{grad } U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}$$

definiert. Er ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und gibt die Richtung des stärksten Anstiegs des Skalarfeldes an.

**Beweis:**

Der Gradient stimmt bis auf Transposition mit der Jacobi-Matrix überein:

$$\text{grad } U = (JU)^t.$$

Bei einer orthogonalen Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad V(\xi, \eta, \zeta) = U(x, y, z)$$

folgt somit aus der Kettenregel

$$(JV)Q = JU \Leftrightarrow \text{grad } V = Q \text{grad } U,$$

was mit der der Transformationsformel für Vektoren übereinstimmt.

### 1.2.2 Gradient eines Vektorfeldes

Der Vektorgradient eines Feldes  $\vec{F}(x, y, z)$  ist die Jacobi-Matrix der Abbildung  $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ :

$$\text{grad } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x F_x & \partial_y F_x & \partial_z F_x \\ \partial_x F_y & \partial_y F_y & \partial_z F_y \\ \partial_x F_z & \partial_y F_z & \partial_z F_z \end{pmatrix},$$

d. h. die Zeilen von  $\text{grad } \vec{F}$  entsprechen den Gradienten der Feld-Komponenten  $F_x, F_y, F_z$ .

### 1.2.3 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z.$$

wird durch

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

definiert. Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Quelldichte des Vektorfeldes.

**Beweis:**

Die Divergenz läßt sich auch als Spur der Jacobi-Matrix der Abbildung  $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$  schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{Spur} J\vec{F}.$$

Bei einer orthogonalen Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{F}(x, y, z)$$

folgt somit aus der Kettenregel

$$(J\vec{G})Q = Q(J\vec{F}).$$

Die Jacobi-Matrizen gehen also durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervor. Die Spur als Summe der Eigenwerte bleibt damit invariant.

**Beispiel:**

Zur Illustration wird die Divergenz zweier typischer Felder berechnet.

Für das zentrale Kraftfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r,$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Für eine wirbelförmige Strömung

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\vec{e}_\varphi$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0.$$

**1.2.4 Rotation**

Die Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z.$$

wird durch

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

definiert. Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Wirbeldichte des Vektorfeldes.

Benutzt man die Indexschreibweise

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i,$$

so läßt sich die Rotation mit Hilfe des  $\varepsilon$ -Tensors in der Form

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} \partial_j F_k$$

schreiben. Diese Definition ist unter anderem bei der Manipulation von Summen vorteilhaft. Für ebene Vektorfelder  $\vec{F}(x, y)$  setzt man

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

was man leicht nachvollziehen kann, wenn man eine zusätzliche dritte Komponente  $F_z = 0$  einführt und die Rotation in  $\mathbb{R}^3$  wie oben berechnet.

### Beweis:

Die Rotation läßt sich auch mit Hilfe der Jacobi-Matrix der Abbildung  $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$  ausdrücken. Für einen beliebigen Vektor  $\vec{a}$  gilt

$$(\operatorname{rot} \vec{F}) \times \vec{a} = \left( \mathbf{J} \vec{F} - (\mathbf{J} \vec{F})^t \right) \vec{a},$$

wie man unmittelbar nachrechnen kann. Bei einer orthogonalen Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{F}(x, y, z)$$

mit  $\det Q = 1$  folgt aus der Kettenregel  $(\mathbf{J} \vec{G})Q = Q(\mathbf{J} \vec{F})$  und somit

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F}) \times \vec{a} &= \left( \mathbf{J} \vec{F} - (\mathbf{J} \vec{F})^t \right) \vec{a} = \left( Q^t (\mathbf{J} \vec{G} - (\mathbf{J} \vec{G})^t) Q \right) \vec{a} \\ &= Q^t ((\operatorname{rot} \vec{G}) \times (Q\vec{a})) = (Q^t \operatorname{rot} \vec{G}) \times \vec{a}. \end{aligned}$$

Die Rotation transformiert sich also in der gleichen Weise wie das Vektorfeld,

$$\operatorname{rot} \vec{G} = Q \operatorname{rot} \vec{F},$$

hängt also nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

### Beispiel:

Zur Illustration wird die Rotation zweier typischer Felder berechnet. Für das zentrale Kraftfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \vec{e}_r,$$

ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine wirbelförmige Strömung

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varphi$$

ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.5 Laplace-Operator

Für ein Skalarfeld  $U$  bezeichnet

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

den Laplace-Operator. Wie Divergenz und Gradient ist  $\Delta$  invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

### 1.2.6 Rechenregeln für Differentialoperatoren erster Ordnung

Im folgenden seien  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$  räumliche Vektorfelder und  $U$ ,  $V$  räumliche Skalarfelder. Für die Hintereinanderschaltung von Gradient, Divergenz und Rotation gilt

1.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$$

2.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

3.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F},$$

dabei ist der Laplace-Operator einer vektorwertigen Funktion komponentenweise zu interpretieren, d. h.

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z.$$

Für die Differentiation von Produkten gilt

4.

$$\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$$

5.

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^t \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^t \vec{F}$$

6.

$$\operatorname{div}(U \vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

7.

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

8.

$$\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U .$$

Die Gleichungen 1, 4, 5, 6 und 8 gelten auch für ebene Felder, wenn man die Definitionen

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \partial_x F_y - \partial_y F_x, \quad \vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x$$

verwendet.

### Beweis:

Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

Exemplarisch werden nur einige der Identitäten betrachtet.

5. Der Gradient von

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z$$

ist die Summe der Gradienten der einzelnen Summanden. Mit der Formel 4 erhält man beispielsweise

$$\operatorname{grad}(F_x G_x) = F_x \operatorname{grad} G_x + G_x \operatorname{grad} F_x .$$

Addiert man die entsprechenden Ausdrücke für die  $y$ - und  $z$ -Komponente und berücksichtigt, dass

$$\left( \operatorname{grad} \vec{H} \right)^t = (\operatorname{grad} H_x, \operatorname{grad} H_y, \operatorname{grad} H_z)$$

so folgt die behauptete Identität.

6.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U\vec{F}) &= \partial_x(UF_x) + \partial_y(UF_y) + \partial_z(UF_z) \\ &= U\partial_x F_x + U\partial_y F_y + U\partial_z F_z + F_x\partial_x U + F_y\partial_y U + F_z\partial_z U \\ &= U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F}^t \operatorname{grad} U . \end{aligned}$$

8. Die  $x$ -Komponente von  $\operatorname{rot}(U\vec{F})$  ist

$$\partial_y(UF_z) - \partial_z(UF_y) = (\partial_y U)F_z - (\partial_z U)F_y + U\partial_y F_z - U\partial_z F_y ,$$

was der  $x$ -Komponente von  $U \operatorname{rot} \vec{F} + (\operatorname{grad} U) \times \vec{F}$  entspricht. Durch zyklische Vertauschung der Variablen folgt die behauptete Identität.

**Beispiel:**

1. Für

$$U = z, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{rot}(U\vec{F}) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x \\ -y - 0 \\ z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(U\vec{F}) &= U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U = z \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \operatorname{grad} z \\ &= z \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix}$$

ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} z^2 - 0 \\ x^2 - 0 \\ y^2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F} &= \operatorname{grad}(2xz + 2yx + 2zy) - \begin{pmatrix} \Delta x^2 z \\ \Delta y^2 x \\ \Delta z^2 y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2z + 2y \\ 2x + 2z \\ 2y + 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**1.2.7 Aufgaben****Aufgabe 1.2.1:**

Berechnen Sie die Rotation und Divergenz der Vektorfelder

$$\vec{F} = r^\alpha \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{G} = r^\alpha \vec{c} \times \vec{r}$$

für  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$  und  $r = |\vec{r}|$ .**1.2.8 Interaktive Aufgaben****Interaktive Aufgabe 1.2.1:**

Berechnen Sie für

$$\varphi = \frac{y}{z}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

die Ausdrücke

$$\operatorname{div}(\varphi f), \quad \operatorname{rot}(\varphi f), \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi), \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi).$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi f) &= \text{keine Angabe } \circ, \quad 0 \circ, \quad \vec{0} \circ, \quad 2\frac{y}{z^3} \circ \quad -\frac{xy}{z^2} \circ, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \quad \begin{pmatrix} x/z \\ -y/z \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \\ \operatorname{rot}(\varphi f) &= \text{keine Angabe } \circ, \quad 0 \circ, \quad \vec{0} \circ, \quad 2\frac{y}{z^3} \circ \quad -\frac{xy}{z^2} \circ, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \quad \begin{pmatrix} x/z \\ -y/z \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) &= \text{keine Angabe } \circ, \quad 0 \circ, \quad \vec{0} \circ, \quad 2\frac{y}{z^3} \circ \quad -\frac{xy}{z^2} \circ, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \quad \begin{pmatrix} x/z \\ -y/z \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) &= \text{keine Angabe } \circ, \quad 0 \circ, \quad \vec{0} \circ, \quad 2\frac{y}{z^3} \circ \quad -\frac{xy}{z^2} \circ, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \quad \begin{pmatrix} x/z \\ -y/z \\ 0 \end{pmatrix} \circ, \end{aligned}$$

## 1.3 Koordinatentransformation

### 1.3.1 Transformation von Differentialoperatoren

Für eine lokal orthogonale Koordinatentransformation  $(x, y, z) \leftarrow (\xi, \eta, \zeta)$  mit den orthonormalen Basisvektoren

$$\vec{e}_\xi = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \partial_\xi x \\ \partial_\xi y \\ \partial_\xi z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\eta = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \partial_\eta x \\ \partial_\eta y \\ \partial_\eta z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\zeta = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \partial_\zeta x \\ \partial_\zeta y \\ \partial_\zeta z \end{pmatrix}$$

transformieren sich die elementaren Differentialoperatoren für räumliche Skalarfelder

$$U(x, y, z) = \Psi(\xi, \eta, \zeta)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_\xi \vec{e}_\xi + \Psi_\eta \vec{e}_\eta + \Psi_\zeta \vec{e}_\zeta = \vec{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)$$

gemäß

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{\alpha} \partial_\xi \Psi \vec{e}_\xi + \frac{1}{\beta} \partial_\eta \Psi \vec{e}_\eta + \frac{1}{\gamma} \partial_\zeta \Psi \vec{e}_\zeta,$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} (\partial_\xi(\beta\gamma\Psi_\xi) + \partial_\eta(\gamma\alpha\Psi_\eta) + \partial_\zeta(\alpha\beta\Psi_\zeta))$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{\beta\gamma} (\partial_\eta(\gamma\Psi_\zeta) - \partial_\zeta(\beta\Psi_\eta)) \vec{e}_\xi + \frac{1}{\gamma\alpha} (\partial_\zeta(\alpha\Psi_\xi) - \partial_\xi(\gamma\Psi_\zeta)) \vec{e}_\eta + \frac{1}{\alpha\beta} (\partial_\xi(\alpha\Psi_\eta) - \partial_\eta(\alpha\Psi_\xi)) \vec{e}_\zeta.$$

Insbesondere folgt, daß für  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  alle elementaren Differentialoperatoren unverändert bleiben.

Für den Laplace-Operator erhält man

$$\Delta U = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \left( \partial_\xi \left( \frac{\beta\gamma}{\alpha} \partial_\xi \Psi \right) + \partial_\eta \left( \frac{\gamma\alpha}{\beta} \partial_\eta \Psi \right) + \partial_\zeta \left( \frac{\alpha\beta}{\gamma} \partial_\zeta \Psi \right) \right).$$

### 1.3.2 Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Für Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

gilt für räumliche Skalarfelder

$$U(x, y, z) = \Psi(\varrho, \varphi, z)$$

und Vektorfelder

$$F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z$$

für die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_\varrho \Psi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Psi \vec{e}_z \\ \Delta U &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Psi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z \\ \text{rot } \vec{F} &= \left( \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + (\partial_z \Psi_\varrho - \partial_\varrho \Psi_z) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\varrho) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

#### Beweis:

Die Formeln folgen unmittelbar durch Spezialisierung der allgemeinen Transformationsregeln. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varrho &= \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \partial_\varrho x \\ \partial_\varrho y \\ \partial_\varrho z \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \partial_\varphi x \\ \partial_\varphi y \\ \partial_\varphi z \end{pmatrix} = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_z &= \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \partial_z x \\ \partial_z y \\ \partial_z z \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d. h.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \varrho$ ,  $\gamma = 1$ .

Somit ist beispielsweise

$$\text{grad } U = \frac{1}{\alpha} \partial_\varrho \Psi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\beta} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\gamma} \partial_z \Psi \vec{e}_z = \partial_\varrho \Psi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Psi \vec{e}_z.$$

### 1.3.3 Axialsymmetrische Skalarfelder und Vektorfelder

Für das axialsymmetrische Skalarfeld  $U(x, y, z) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \psi(\varrho)$  ist

$$\text{grad } U = \psi' \vec{e}_\varrho$$

und

$$\Delta U = \psi'' + \varrho^{-1} \psi'.$$

Speziell erhält man für  $U(x, y, z) = \varrho^s$

$$\text{grad } U = s\varrho^{s-1}\vec{e}_\varrho = s(x^2 + y^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta U = s^2\varrho^{s-2}.$$

Die Divergenz des quellenförmigen Feldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \psi(\varrho)\vec{e}_\varrho$$

ist

$$\text{div } \vec{F} = \psi' + \varrho^{-1}\psi.$$

Speziell erhält man für  $\vec{F}(x, y, z) = \varrho^s\vec{e}_\varrho$

$$\text{div } \vec{F} = (s + 1)\varrho^{s-1}.$$

Für  $s = -1$  ist das Feld bis auf die Singularität im Ursprung divergenzfrei.

Die Rotation des wirbelförmigen Feldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \psi(\varrho)\vec{e}_\varphi$$

ist

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' + \varrho^{-1}\psi \end{pmatrix}.$$

Speziell erhält man für  $\vec{F}(x, y, z) = \varrho^s\vec{e}_\varphi$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (s + 1)\varrho^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Für  $s = -1$  ist das Feld bis auf die Singularität im Ursprung rotationsfrei.

### 1.3.4 Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

gilt für räumliche Skalarfelder

$$U(x, y, z) = \Psi(r, \vartheta, \varphi)$$

und Vektorfelder

$$F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z = \Psi_r\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\vec{e}_\varphi$$

für die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} U &= \partial_r \Psi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Psi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Psi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Psi) \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta) \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

### Beweis:

Die Formeln folgen unmittelbar durch Spezialisierung der allgemeinen Transformationsregeln. Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \\ \partial_r z \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_\vartheta &= \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \partial_\vartheta x \\ \partial_\vartheta y \\ \partial_\vartheta z \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \partial_\varphi x \\ \partial_\varphi y \\ \partial_\varphi z \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

d. h.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = r$ ,  $\gamma = r \sin \vartheta$ .

Somit ist beispielsweise

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{\alpha} \partial_r \Psi \vec{e}_r + \frac{1}{\beta} \partial_\vartheta \Psi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\gamma} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi = \partial_r \Psi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Psi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi \vec{e}_\varphi.$$

### 1.3.5 Radialsymmetrische Skalarfelder und Vektorfelder

Für das radialsymmetrische Skalarfeld  $U(x, y, z) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \psi(r)$  ist

$$\operatorname{grad} U = \psi' \vec{e}_r$$

und

$$\Delta U = \psi'' + \frac{2}{r} \psi'.$$

Speziell erhält man für  $U(x, y, z) = r^s$

$$\operatorname{grad} U = s r^{s-1} \vec{e}_r = s(x^2 + y^2 + z^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta U = s(s+1)r^{s-2}.$$

Für  $s = -1$  ist  $U$  bis auf die Singularität im Ursprung harmonisch.  
Die Divergenz des quellenförmigen Feldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \psi(r)\vec{e}_r$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \psi' + \frac{2}{r}\psi.$$

Speziell erhält man für  $\vec{F}(x, y, z) = r^s\vec{e}_r$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (s + 2)r^{s-1}.$$

Für  $s = -2$  ist das Feld bis auf die Singularität im Ursprung divergenzfrei.

### 1.3.6 Aufgaben

#### Aufgabe 1.3.1:

Bezüglich der kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  seien die folgenden Felder definiert:

$$U(x, y, z) = x^2(1 - y) + 3yz, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x^2 + y^2 \\ xz - 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

- $\Delta U$  in Kugelkoordinaten,
- $\operatorname{rot} \vec{F}$  bezüglich der Zylinderkoordinatenbasis  $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ,
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(U\vec{F}))$  in kartesischen Koordinaten.

#### Aufgabe 1.3.2:

Die Vektorfelder

$$\vec{F}(\vec{r}) = A\vec{r}, \quad \vec{G}(\varrho, \varphi, z) = g(\varrho)\vec{e}_\varphi, \quad \vec{H}(r, \vartheta, \varphi) = h(r)\vec{e}_r$$

sind in kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten gegeben.  
 $A$  ist eine konstante  $3 \times 3$ -Matrix,  $g$  und  $h$  sind skalare Funktionen.

- Bestimmen Sie  $A, g$  und  $h$  so, dass die Divergenz der Vektorfelder in kartesischen Koordinaten jeweils 0 wird.
- Bestimmen Sie  $A, g$  und  $h$  so, dass die Rotation der Vektorfelder in kartesischen Koordinaten jeweils  $\vec{0}$  wird.

# Kapitel 2

## Integration

### 2.1 Kurvenintegrale

#### 2.1.1 Kurvenintegral für Skalarfelder

Für eine Kurve  $C$  mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld  $U(x, y, z)$  wird das Integral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}) |\vec{r}'(t)| dt$$

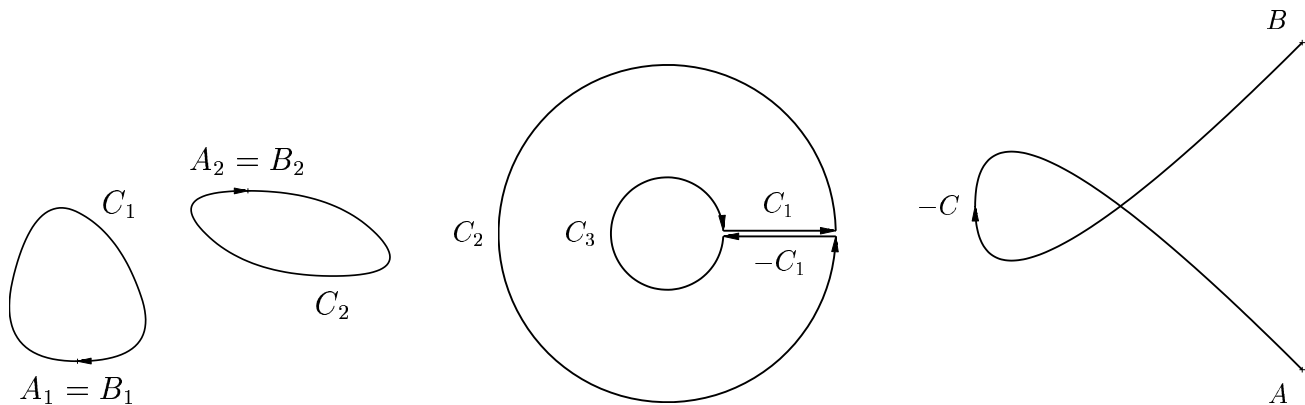
als Kurvenintegral von  $U$  über der Kurve  $C$  bezeichnet. Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung.

#### 2.1.2 Weg

Ein Weg

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

ist eine Kurve mit festgelegtem Durchlaufsinne, der i. a. durch Pfeile angedeutet wird. Man sagt, die Kurve verläuft von  $A = (x(a), y(a), z(a))$  nach  $B = (x(b), y(b), z(b))$ . Gilt  $A = B$ , so spricht man von einem geschlossenen Weg.



nicht zusammenhängender Weg  $C = C_1 + C_2$

zum teil mehrfach durchlaufener Weg  $C = C_1 + C_2 - C_1 + C_3$

offener Weg  $-C$  mit umgekehrter Durchlaufrichtung

Für zusammengesetzte Wege ist die Notation

$$C_1 + \dots + C_m$$

gebräuchlich. Dabei können einzelne Wegstücke mehrfach durchlaufen werden ( $\sum C_i \neq \cup C_i$ ), und die Vereinigung der Wege muß nicht zusammenhängend sein. Schließlich bezeichnet man mit  $-C$  den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg  $C$ .

### 2.1.3 Arbeitsintegral

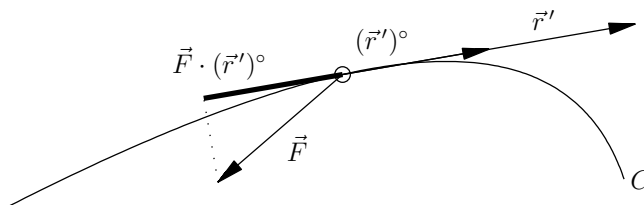
Für einen Weg  $C$  mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Vektorfeld  $\vec{F}(x, y, z)$  wird mit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

das Arbeitsintegral bezeichnet.



Es entspricht dem Kurvenintegral der Projektion von  $\vec{F}$  in tangentialer Richtung,

$$\vec{F} \cdot (\vec{r}')^\circ, \quad (\vec{r}')^\circ = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|},$$

und ist unabhängig von der Parametrisierung bei gleichbleibender Orientierung des Weges. Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

In Komponentenschreibweise hat das Arbeitsintegral die Form

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

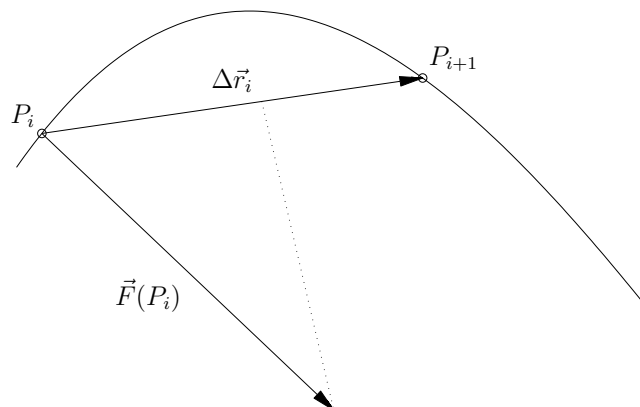
mit  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$ ,  $dz = z'(t) dt$ .

### Beweis:

Das Arbeitsintegral kann durch die Riemann-Summe

$$\sum_i \vec{F}(P_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

approximiert werden, was die physikalische Interpretation verdeutlicht. Dabei kann unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bei der Grenzwertbildung  $\Delta \vec{r}_i$  durch  $\vec{r}'(t_i) \Delta t_i \rightarrow \vec{r}'(t) dt$  ersetzt werden.



Der  $i$ -te Summand in der Riemann-Summe ist die Kraft, die näherungsweise entlang des Weges von  $P_i$  nach  $P_{i+1}$  wirkt. Die Summanden entsprechen also der entlang den Kurvenstücken verrichteten Arbeit.

### Beispiel:

Beim Durchlaufen des Viertelkreises

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

im Kraftfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

wird die Arbeit

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -2 \cos t \sin t dt \\ &= [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

verrichtet.

### 2.1.4 Geradliniger Weg

Die in einem Kraftfeld  $\vec{F}$  entlang eines Geradenstücks

$$t \mapsto \vec{p} + t\vec{d}, \quad t \in [a, b]$$

verrichtete Arbeit ist

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{p} + t\vec{d}) \cdot \vec{d} dt.$$

Als konkretes Beispiel seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit  $t \in [a, b] = [0, 3]$  und

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

Für die verrichtete Arbeit erhält man dann

$$\int_0^3 \begin{pmatrix} 2t(2t+1) \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^3 6t^2 + 6t + 2 dt = [2t^3 + 3t^2 + 2t]_0^3 = 87.$$

### 2.1.5 Spulenwindung

Ein Elektron bewegt sich in einer Spulenwindung der Höhe  $h$ ,

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht/(2\pi) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

im elektrischen Feld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad r = |\vec{r}|$$

das von einer Punktladung im Ursprung induziert wird. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos^2 t + \sin^2 t + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht / (2\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h / (2\pi) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{h^2 t^2 / (4\pi^2)}{(1 + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} dt = \left[ -\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2 + h^2 t^2}} \right]_0^{2\pi} = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \right). \end{aligned}$$

### 2.1.6 Vektoriell Kurvenintegral

Für einen Weg  $C$  mit regulärer Parametrisierung  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , und ein Vektorfeld  $\vec{F}$  bezeichnet man

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \begin{pmatrix} \int_C F_x \\ \int_C F_y \\ \int_C F_z \end{pmatrix} \\ \int_C \vec{F} \times d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}'(t) dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y dz - F_z dy) \\ \int_C (F_z dx - F_x dz) \\ \int_C (F_x dy - F_y dx) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$ ,  $dz = z'(t) dt$ , als vektorielle Kurvenintegrale. Das zweite Integral ändert das Vorzeichen bei Umkehrung des Durchlaufsinns, ansonsten sind die Integralwerte unabhängig von der Parametrisierung.

### 2.1.7 Aufgaben

#### Aufgabe 2.1.1:

Berechnen Sie das Arbeitsintegral für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ y - x \end{pmatrix}$$

entlang der folgenden Wege von  $P = (0, 0)$  nach  $Q = (1, 1)$ :

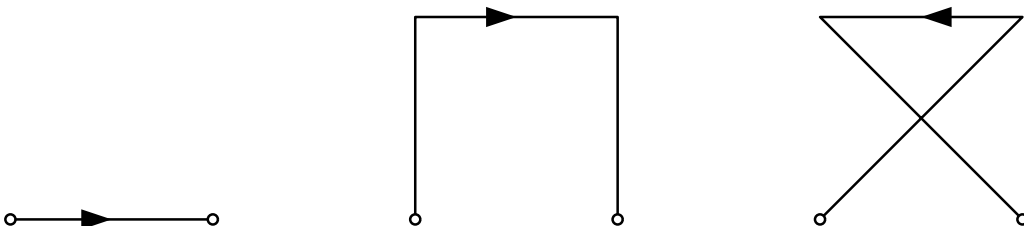
- a)  $x = t^2$ ,  $y = t$       b)  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$       c)  $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

#### Aufgabe 2.1.2:

Berechnen Sie

$$\int_C (y^2 dx - x^2 dy)$$

für die abgebildeten Wege von  $(0, 0)$  nach  $(1, 0)$ .



**Aufgabe 2.1.3:**

Berechnen Sie für das Feld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

das Arbeitsintegral  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs des Weges, der vom Punkt  $P = (0, 0, 0)$  geradlinig zum Punkt  $Q = (a, b, 0)$  und dann geradlinig zum Punkt  $R = (1, 1, 1)$  führt. Wie müssen  $a$  und  $b$  gewählt werden, damit das Arbeitsintegral ein Extremum annimmt? Handelt es sich dabei um ein Maximum?

**Aufgabe 2.1.4:**

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 \end{pmatrix}$$

das Arbeitsintegral  $s_\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  entlang des Kreises  $C_\varepsilon : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  und bestimmen Sie den Grenzwert

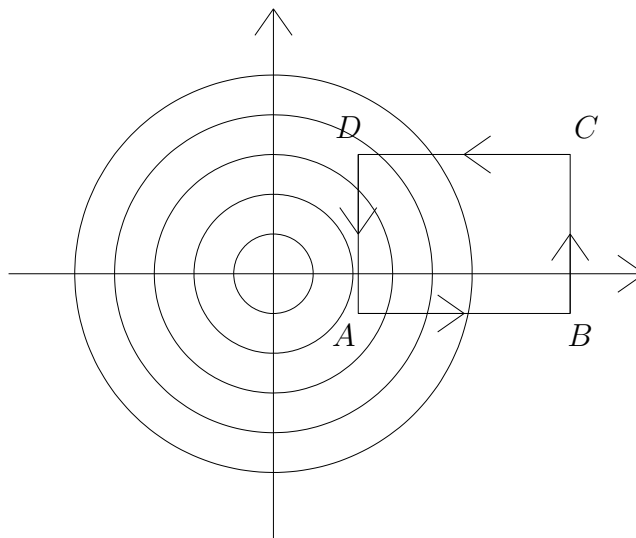
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon}{\pi \varepsilon^2}.$$

**Aufgabe 2.1.5:**

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt ein ebenes magnetisches Feld der Form

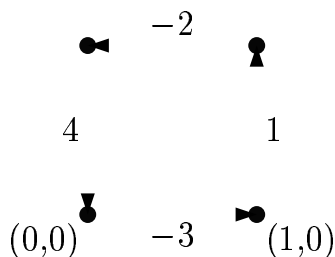
$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral entlang eines achsenparallelen Rechtecks  $ABCD$  mit  $A = (u, v)$  und  $C = (u + p, v + q)$ .



**Aufgabe 2.1.6:**

Geben Sie ein Vektorfeld an, für das das Arbeitsintegral über die abgebildeten Wege die angegebenen Werte hat.

**2.1.8 Interaktive Aufgaben****Interaktive Aufgabe 2.1.1:**

Berechnen Sie die Arbeit, die ein Massenpunkt im Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

bei der Bewegung von  $P = (0, 0)$  nach  $Q = (1, 2)$  verrichtet

- längs der geradlinigen Verbindung,
- längs des Polygonzugs von  $P$  über  $(0, 2)$  nach  $Q$ ,
- längs der Kurve  $y = 2 \sin \frac{\pi x}{2}$ .

**Lösung:** (Eingaben sind auf vier Nachkommastellen zu runden)

a)  b)  c)

**2.2 Flächenintegrale****2.2.1 Flächenintegral für Skalarfelder**

Für eine Fläche  $S$  mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld  $U(x, y, z)$  wird das Integral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

als Flächenintegral von  $U$  über  $S$  bezeichnet. Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung.

### 2.2.2 Flussintegral

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes  $\vec{F}(x, y, z)$  durch eine Fläche  $S$  mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \in S$$

in Richtung der Normalen

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

ist

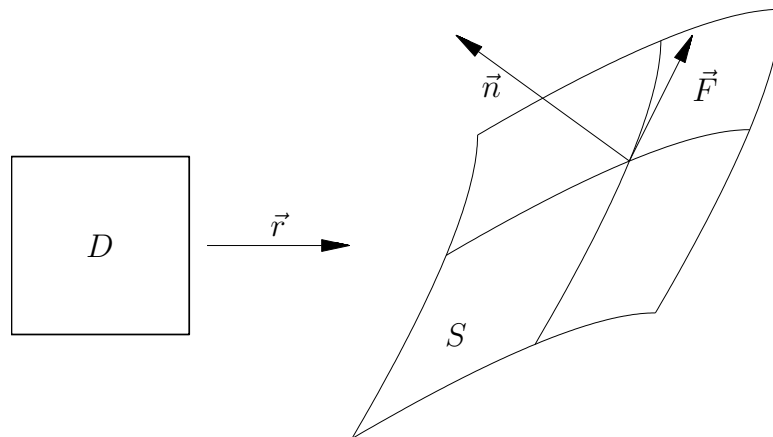
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv.$$

Man bezeichnet dabei

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS, \quad dS = |\vec{n}(u, v)| \, dudv$$

als vektorielles Flächenelement.

Bei gleicher Orientierung des Normalenvektors ist das Flussintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Die Umkehrung der Normalenrichtung bewirkt eine Änderung des Vorzeichens.



Die Glattheitsvoraussetzungen an  $\vec{F}$  und  $\vec{r}(u, v)$  können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

#### Beispiel:

Es soll der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ yz \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$S: \quad \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u + v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

berechnet werden.

Die partiellen Ableitungen in  $u$ - und  $v$ -Richtung sind

$$\partial_u \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

und damit

$$\vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r}(u, v) \times \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix}.$$

Für das Flussintegral ergibt sich also

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} u^2 \\ 1 \\ uv^2 + v^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2u^2v - 4uv + 2u^2v^2 + 2uv^3 du dv \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{2}{3}u^3v - 2u^2v + \frac{2}{3}u^3v^2 + u^2v^3 \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 -\frac{4}{3}v + \frac{2}{3}v^2 + v^3 dv = \left[ -\frac{2}{3}v^2 + \frac{2}{9}v^3 + \frac{1}{4}v^4 \right]_0^1 \\ &= -\frac{7}{36}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Fluss durch einen Funktionsgraph

Der Fluss in  $z$ -Richtung eines stetigen Vektorfelds  $\vec{F}(x, y, z)$  durch den Graph  $S$  einer differenzierbaren, skalaren Funktion  $z = f(x, y)$  über dem Definitionsgebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy$$

**Beweis:**

Die angegebene Formel folgt aus der Definition des Flussintegrals, wenn man  $S$  in der Form

$$S : (u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Es ist dann

$$\partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} -\partial_1 f \\ -\partial_2 f \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv &= \iint_D \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_1 f \\ -\partial_2 f \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv \\
 &= \iint_D -F_x \partial_1 f - F_y \partial_2 f + F_z \, dudv \\
 &= \iint_D -F_x \partial_x z - F_y \partial_y z + F_z \, dxdy
 \end{aligned}$$

### Beispiel:

Es soll der Fluss in  $z$ -Richtung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

durch den Graph der Funktion

$$z(x, y) = x^2 - y$$

über dem Bereich

$$D : |x| + |y| \leq 1$$

berechnet werden.

Da sowohl das Vektorfeld als auch der Funktionsgraph symmetrisch zur  $yz$ -Ebene sind, genügt es den Bereich  $D$  für  $x \geq 0$  zu betrachten und das Ergebnis zu verdoppeln. Für den Gesamtfluss erhält man damit

$$\begin{aligned}
 \iint_D -F_x \partial_x z - F_y \partial_y z + F_z \, dxdy &= 2 \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} -x(2x) + 1 + x^2 - y \, dy \, dx \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ -x^2 y + y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x-1}^{y=1-x} \, dx \\
 &= \int_0^1 4x^3 - 4x^2 - 4x + 4 \, dx \\
 &= \left[ x^4 - \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

### 2.2.4 Fluss eines konstanten Vektorfeldes durch eine Ebene

Es soll der Fluss eines konstanten Vektorfeldes  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{p}$  durch einen Teilbereich  $S$  einer Ebene  $E$

$$S : z(x, y) = ax + by, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

von unten nach oben berechnet werden.

Als Normalenvektor für die Ebene erhält man

$$\vec{n}(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_x z \\ -\partial_y z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für den Fluss somit

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} dx dy \\ &= (-ap_x - bp_y + p_z) \text{area}(D). \end{aligned}$$

### 2.2.5 Fluss durch einen Zylindermantel

Der Fluss eines Feldes

$$\vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

in Richtung  $\vec{e}_\varrho$  durch den Mantel eines Zylinders mit Randkurve  $\varrho = \varrho(\varphi)$  ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Der Fluss des Feldes in Richtung  $\vec{e}_\varrho$  durch eine Rotationsfläche die durch Drehung der Kurve  $\varrho = \varrho(z)$  um die  $z$ -Achse entsteht ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Der Fluss von innen nach außen durch den Mantel eines Kreiszyinders mit  $\varrho = a$  ist demnach

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \, dz \, d\varphi,$$

d. h. nur die axialsymmetrische Komponente des Feldes liefert einen Beitrag.

Insbesondere ist beim Kreiszyinder der Fluss für ein axialsymmetrisches Feld  $\vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_\varrho$  gleich  $2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a)$ .

#### Beweis:

Die Mantelfläche kann mit Hilfe von Zylinderkoordinaten parametrisiert werden:

$$S : \quad \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Für  $\varrho = \varrho(\varphi)$  ist die Flächennormale

$$\begin{aligned}\vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \\ \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ -\partial_\varphi \varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\partial_\varphi \varrho \vec{e}_\varphi + \varrho \vec{e}_\varrho,\end{aligned}$$

und das Skalarprodukt mit dem Vektorfeld mit den Komponenten  $F_\varrho, F_\varphi, F_z$  ergibt aufgrund der Orthogonalität der Basisvektoren

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho.$$

Ist  $\varrho = \varrho(z)$  von  $z$  abhängig ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}\vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_z \varrho \cos \varphi \\ \partial_z \varrho \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ -\varrho \partial_z \varrho \end{pmatrix} \\ &= \varrho \vec{e}_\varrho - \varrho \partial_z \varrho \vec{e}_z\end{aligned}$$

und das Skalarprodukt mit dem Vektorfeld ist

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho.$$

Für den Kreiszyylinder ist  $\varrho$  konstant und somit fallen die Terme, in denen eine Ableitung von  $\varrho$  vorkommt, weg.

### Beispiel:

Es soll der Fluss des Feldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz^2 \\ yz^2 \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Abstand  $a$  zur  $z$ -Achse und  $z_{\min} = 0$ ,  $z_{\max} = b$  berechnet werden.

Man erhält

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho z^2$$

und somit für den Fluss

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho(a, \varphi, z) a dz d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^b z^2 dz d\varphi = \frac{1}{3} a^2 b^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi a^2 b^3.$$

**Beispiel:**

Der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z$$

in Richtung  $\vec{e}_\varrho$  durch einen Zylindermantel, der durch die Kardioide  $\varrho(\varphi) = 1 - \cos \varphi$  im Bereich  $z \in [0, a]$  erzeugt wird, ist

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \varrho^2(\varphi) dz d\varphi = a \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a \left( 2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi a.$$

**2.2.6 Fluss durch Rotationsfläche**

Der Fluss eines parallel zur  $z$ -Achse verlaufenden, konstanten Vektorfeldes  $\vec{F} = c\vec{e}_z$  in Richtung  $\vec{e}_\varrho$  durch eine Rotationsfläche mit  $\varrho = \varrho(z)$ ,  $z \in [a, b]$ , ist

$$- \int_0^{2\pi} \int_a^b c\varrho(z)\varrho'(z) dz d\varphi = -2\pi c \left[ \frac{1}{2} \varrho^2(z) \right]_a^b = \pi c (\varrho^2(a) - \varrho^2(b)).$$

Der Fluss entspricht also dem  $c$ -fachen der Differenz der Inhalte der Boden- und Deckfläche des von  $\varrho(z)$  beschriebenen Rotationskörpers.

**2.2.7 Fluss durch eine Sphäre**

Der Fluss eines Vektorfeldes

$$\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

von innen nach außen durch eine Sphäre mit Abstand  $r = a$  zum Ursprung ist

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta,$$

d. h. nur die radiale Komponente des Feldes liefert einen Beitrag.

Insbesondere ist der Fluss für ein radiales Feld  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  gleich  $4\pi a^2 f(a)$ .

**Beispiel:**

Es soll der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (r \sin \vartheta)^\alpha \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch die Sphäre mit Radius  $a$  berechnet werden.

Man erhält

$$\begin{aligned} F_r(r, \vartheta, \varphi) &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = (r \sin \vartheta)^\alpha \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= (r \sin \vartheta)^\alpha r \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

und somit für den Fluss

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r(a, \vartheta, \varphi) a^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta &= a^{\alpha+3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{\alpha+3} \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 4\pi a^{\alpha+3} \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha+3} \vartheta \, d\vartheta \\ &= 2\pi^{3/2} a^{\alpha+3} \frac{\Gamma(2 + \alpha/2)}{\Gamma(5/2 + \alpha/2)}. \end{aligned}$$

### 2.2.8 Senkrechte Stömung durch Halbkugelschale

Es soll der Fluss der senkrechten Strömung

$$\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

von unten nach oben durch die Halbkugelschale

$$r = a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

berechnet werden.

Man erhält

$$\begin{aligned} F_r(r, \vartheta, \varphi) &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= r \cos^2 \vartheta \end{aligned}$$

und somit für den Fluss

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F_r(a, \vartheta, \varphi) a^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 2\pi a^3 \left[ \frac{-\cos^3 \vartheta}{3} \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

### 2.2.9 Fluss eines axialsymmetrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche

Die Projektion eines axialsymmetrischen Feldes

$$\vec{F}(\varrho, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

auf die Einheitsnormale der Kugeloberfläche mit Radius  $a$

$$\vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

ergibt mit

$$\vec{e}_\varrho \cdot \vec{n}^\circ = \sin \vartheta, \quad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{n}^\circ = 0, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{n}^\circ = \cos \vartheta,$$

den Fluss

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^\pi (F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Speziell gilt für  $F_\varrho = \varrho^{2s}$ ,  $F_z = c$

$$F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta = a^{2s} \sin^{2s} \vartheta + c \cos \vartheta.$$

Der zweite Summand verschwindet bei der Integration, so dass sich als Fluss insgesamt

$$2\pi a^2 \int_0^\pi a^{2s} \sin^{2s+1} \vartheta d\vartheta = 2\pi a^2 a^{2s} \frac{2^{2s} (s!)^2}{(2s+1)!} 2 = \pi (2a)^{2(s+1)} \frac{(s!)^2}{(2s+1)!}$$

ergibt.

### 2.2.10 Vektoriellcs Flächenintegral

Für eine Fläche  $S$  mit regulärer Parametrisierung  $\vec{r}(u, v)$ , ein Skalarfeld  $U$  und ein Vektorfeld  $\vec{F}$  definiert man

$$\iint_S \vec{F} dS = \begin{pmatrix} \iint_S F_x dS \\ \iint_S F_y dS \\ \iint_S F_z dS \end{pmatrix}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}) \vec{n}^\circ dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ dS$$

wobei  $\vec{n}(u, v)$  den Normalenvektor auf  $S$  bezeichnet. Bei gleicher Orientierung des Normalenvektors, sind alle Integrale von der Parametrisierung unabhängig.

### 2.2.11 Aufgaben

#### Aufgabe 2.2.1:

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes  $\vec{F} = r^{\alpha-1} \vec{e}_r$ ,  $r = |\vec{r}|$  durch den Zylinder  $S : x^2 + y^2 = a$ ,  $|z| \leq b$ .

#### Aufgabe 2.2.2:

Berechnen Sie für eine Matrix  $A$  den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times (A\vec{r})$$

durch den Zylinder  $Z : x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

**Aufgabe 2.2.3:**

Berechnen Sie den Fluß eines linearen Feldes  $\vec{F} = A\vec{r}$ , durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $s$ .

**Aufgabe 2.2.4:**

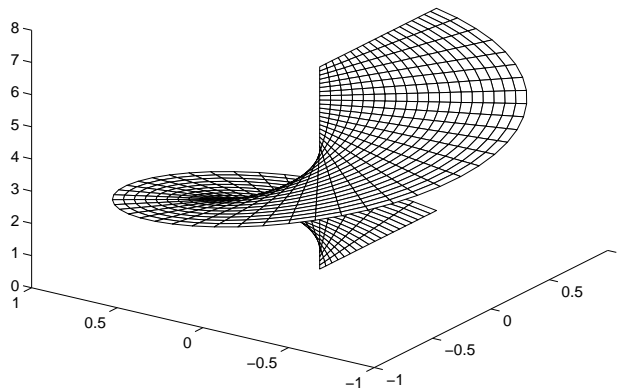
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes  $\vec{F} = r^{2\alpha+1}\vec{e}_r$  durch eine Kugel mit Radius  $a$  und Mittelpunkt  $O$ .

**2.2.12 Interaktive Aufgaben****Interaktive Aufgabe 2.2.1:**

Die abgebildete Fläche  $F$  sei durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert.



- Bestimmen Sie den Normalenvektor  $n(r, t)$  von  $F$ .
- Berechnen Sie den Betrag  $|\Phi|$  des Flusses des Vektorfeldes  $v = (y, -x, z)^t$  durch die Fläche  $F$ .
- Die Randkurve der Fläche  $F$  besteht aus 3 Geradenstücken sowie der Schraubenlinie  $C : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^t$ . Berechnen Sie die Länge  $L$  von  $C$ .

**Lösung:**

$$\text{a) } n(r, t) = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{00}}(t) \\ -\boxed{\phantom{00}}(t) \\ \boxed{\phantom{00}} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |\Phi| = \boxed{\phantom{00}}\pi + \boxed{\phantom{00}}\pi^2.$$

$$\text{c) } L = \boxed{\phantom{00}}\sqrt{2}\pi$$

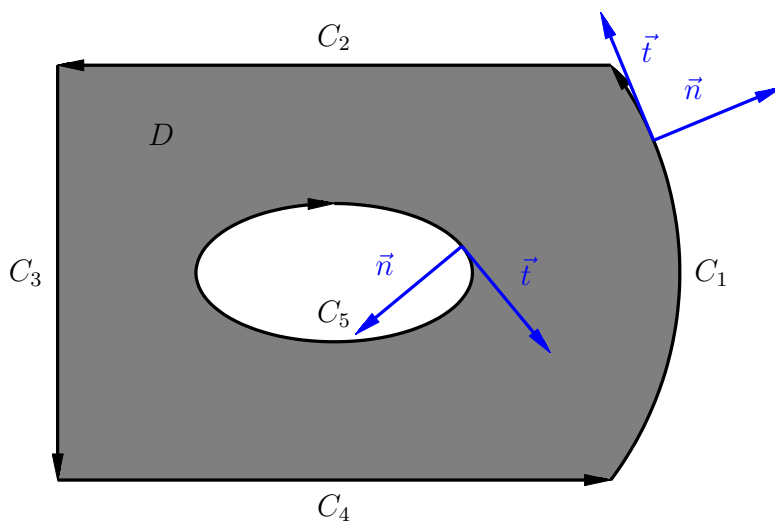
## 2.3 Gauß'sche Integralsätze

### 2.3.1 Orientierter Rand eines ebenen Bereichs

Der orientierte Rand  $R$  eines Bereichs  $D$  setzt sich aus Wegen  $C_i$  zusammen, deren Durchlaufsinne so gewählt ist, daß  $D$  links von  $C_i$  liegt:

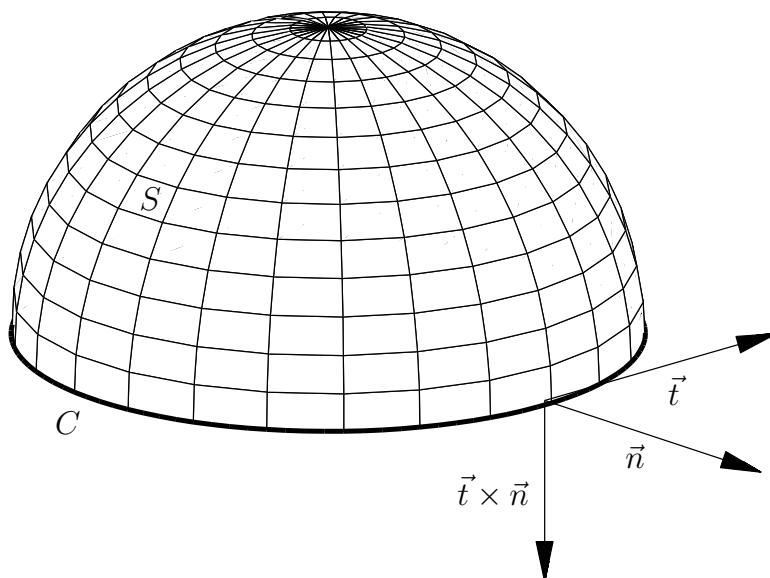
$$R = C_1 + \cdots + C_m.$$

Dies bedeutet, daß die nach außen gerichtete Kurvennormale  $\vec{n}$  und der Tangentenvektor  $\vec{t}$  ein Rechtssystem bilden.



orientierter Rand  $R = C_1 + \cdots + C_5$

Entsprechend setzt sich der orientierte Rand  $R$  einer räumlichen Fläche  $S$  mit orientierter Normalen  $\vec{n}$  aus Wegen  $C_i$  zusammen, deren Orientierung so gewählt ist, dass an einem Kurvenpunkt das Kreuzprodukt aus Tangentenvektor  $\vec{t}$  an die Kurve und Normalenvektor  $\vec{n}$  der Fläche von der Fläche weg zeigt.



### 2.3.2 Gauß'scher Integralsatz

Ist  $\vec{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem regulären räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine Fläche  $S$  mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement  $d\vec{S}$  berandet wird, so gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an  $\vec{F}$  und  $S$  können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

#### Beweis:

Die Identität ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale. Danach gilt für  $\vec{F} = \sum F_\nu \vec{e}_\nu$

$$\iiint_V \partial_\nu F_\nu dV = \iint_S F_\nu n_\nu dS,$$

und Summation über  $\nu = 1, 2, 3$  ergibt die Behauptung, da  $d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS$  ist.

#### Beispiel:

Zur Illustration des Gauß'schen Satzes wird das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

in der Einheitskugel

$$V: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

betrachtet.

Für die Divergenz ergibt sich

$$\operatorname{div} \vec{F} = 1 + x + 3z^2 = 1 + r \cos \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \vartheta$$

und somit für die linke Seite im Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ &= \frac{4}{3}\pi + 0 + 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi r^4 (3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) d\vartheta dr \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\pi \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^1 [-\cos^3 \vartheta]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

Mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

für die Oberfläche  $S$  der Einheitskugel ergibt sich

$$\vec{n}^\circ(\vartheta, \varphi) = \vec{r}(\vartheta, \varphi), \quad d\vec{S} = \vec{n}^\circ \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

und mit

$$\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta \\ \cos^3 \vartheta \end{pmatrix}$$

folgt für die rechte Seite im Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^3 \vartheta + \cos^4 \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta \\ &= \pi \int_0^\pi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta + 0 + 2\pi \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \pi \left( [-\cos \vartheta]_0^\pi + \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \right) + 2\pi \left[ -\frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Volumenintegral.

### 2.3.3 Integralsatz von Gauß bei einem radialen Feld

Bei einem radialen Feld

$$\vec{F} = r^s \vec{e}_r$$

ist die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2)r^{s-1}.$$

Das Volumenintegral über eine Kugel  $V$  mit Radius  $a$  ist

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = 4\pi \int_0^a (s+2)r^{s+1} \, dr = 4\pi a^{s+2}, \quad (s > -2),$$

wobei das uneigentliche Integral für  $s > -2$  konvergiert.

Da das Vektorfeld senkrecht auf der Kugel steht, entspricht das Flussintegral dem Betrag des Feldes auf der Kugel multipliziert mit dem Inhalt der Kugeloberfläche  $S$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = (4\pi a^2) a^s$$

in Übereinstimmung mit dem Integralsatz von Gauß.

### 2.3.4 Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß

Für einen regulären räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine Fläche  $S$  mit nach außen weisender Normalen berandet wird, gilt wegen  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$

$$3 \operatorname{vol}(V) = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}.$$

**Beispiel:**

Als Beispiel soll das Volumen der Kugel  $V$  mit Radius  $a > 0$ , Mittelpunkt im Ursprung und Oberfläche  $S$  berechnet werden. In Polarkoordinaten erhält man für den Rand  $S$  die Parametrisierung

$$S: \quad \vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \sin \vartheta \\ a \sin \varphi \sin \vartheta \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi,$$

mit

$$d\vec{S} = a^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{vol}(V) &= \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos \varphi \sin \vartheta \\ a \sin \varphi \sin \vartheta \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

und damit für das Volumen der Kugel  $\operatorname{vol}(V) = \frac{4}{3}\pi a^3$  wie erwartet.

**2.3.5 Varianten des Gauß'schen Integralsatzes**

Sei  $V$  ein regulärer räumlicher Bereich, der durch eine Fläche  $S$  mit nach außen orientiertem vektoriellem Flächenelement  $d\vec{S}$  berandet wird. Dann gelten für ein Skalarfeld  $U$  und ein Vektorfeld  $\vec{F}$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{grad} U dV &= \iint_S U d\vec{S} \\ \iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV &= - \iint_S \vec{F} \times d\vec{S}. \end{aligned}$$

**Beweis:**

Wegen  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  ist die erste Identität äquivalent zum Hauptsatz für Mehrfachintegrale

$$\iiint_V \partial_\nu U dV = \iint_S U n_\nu dS.$$

Für die  $i$ -te Komponente des Integrals von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  erhält man unter Verwendung des  $\varepsilon$ -Tensors

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \iiint_V \partial_j F_k dV = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \iint_S F_k n_j dS,$$

was mit der  $i$ -ten Komponente von  $-\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$  übereinstimmt.

### 2.3.6 Koordinatenfreie Definition der Divergenz

Die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes läßt sich als Grenzwert des Flusses durch die Oberfläche  $S$  eines den Punkt  $P$  enthaltenden räumlichen Bereichs  $V$  definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

wobei  $d\vec{S}$  nach außen orientiert ist. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß und dem Mittelwertsatz und zeigt insbesondere die Invarianz der Divergenz unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

### 2.3.7 Quellenfreie Felder

Auf einem räumlichen Gebiet  $D$  gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\text{div } \vec{F} = 0$  genau dann, wenn

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

für jede geschlossene Fläche  $S$  in  $D$ .

### 2.3.8 Koordinatenfreie Definition des Gradienten

Der Gradient eines stetig differenzierbaren Skalarfeldes  $U$  läßt sich als Grenzwert von Integralen über die Oberfläche  $S$  eines den Punkt  $x$  enthaltenden räumlichen Bereichs  $V$  definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S U d\vec{S},$$

wobei  $d\vec{S}$  nach außen orientiert ist. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß und dem Mittelwertsatz und zeigt insbesondere die Invarianz des Gradienten unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

### 2.3.9 Elektrostatisches Feld

Durch Punktladungen wird ein elektrisches Feld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_P a_P \frac{\vec{r} - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{p}|^3}$$

erzeugt, wobei  $a_P = Q_P/(4\pi\varepsilon_0)$ ,  $Q_P$  die Ladung im Punkt  $P$  und  $\varepsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante ist.

Der Fluss dieses Feldes durch eine die Punkte  $P$  umschließende glatte Fläche  $S$  ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_P a_P = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_P Q_P.$$

Dabei sind für Punkte  $P$  auf der Fläche die Ladungen  $Q_P$  mit dem Faktor  $1/2$  zu gewichten.

**Beweis:**

Aufgrund der Linearität beider Seiten der Identität genügt es, einen Summanden ohne Vorfaktor zu betrachten. Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass  $\vec{p} = \vec{0}$  ist. Es bleibt nun zu zeigen, dass

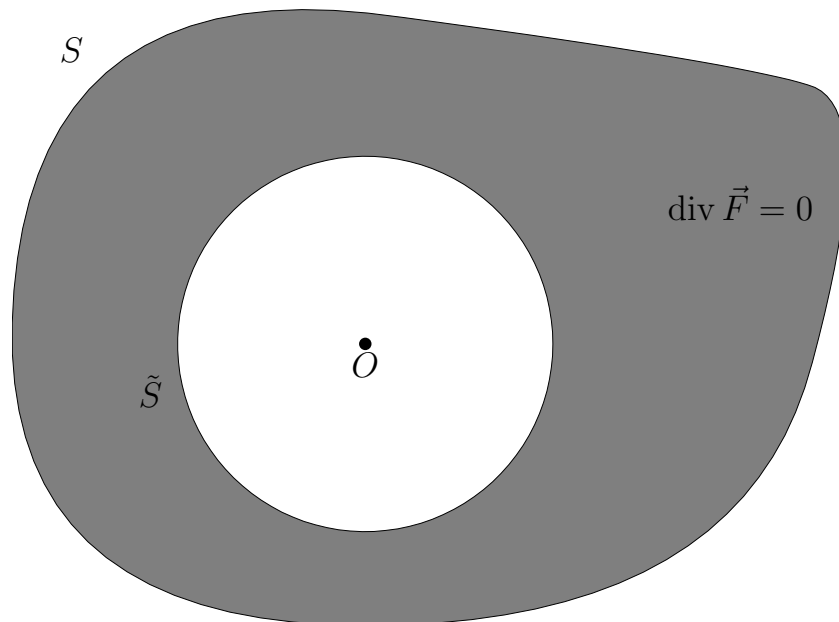
$$\iint_S \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & , O \notin V \\ 4\pi & , O \in V \\ 2\pi & , O \in S \end{cases} ,$$

wobei  $V$  das von  $S$  eingeschlossene Gebiet ist.

Da  $\operatorname{div} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = 0$  für  $r \neq 0$  gilt, folgt der erste Fall ( $O \notin V$ ) direkt aus dem Integralsatz von Gauß.

Für den zweiten Fall ( $O \in V$ ) betrachtet man zunächst eine Kugel mit Radius  $s$  um den Ursprung. Der Fluss des radialen Feldes  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  durch diese Kugel ist

$$\iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi s^2 f(s) = 4\pi .$$



Ein allgemeines Gebiet das  $O$  enthält, kann in eine Kugel um die Ladung und ein Restgebiet aufgeteilt werden, das keine Ladung enthält. Da der Gesamtfluss durch die Oberfläche ( $S - \tilde{S}$ ) des Restgebietes Null ist, muss der Fluss durch die Randfläche  $S$  dem Fluß durch die Kugeloberfläche  $\tilde{S}$  entsprechen.

Für den dritten Fall ( $O \in S$ ) betrachtet man eine Kugel mit Radius  $s$  um  $(0, 0, s)$ . Für die Parametrisierung

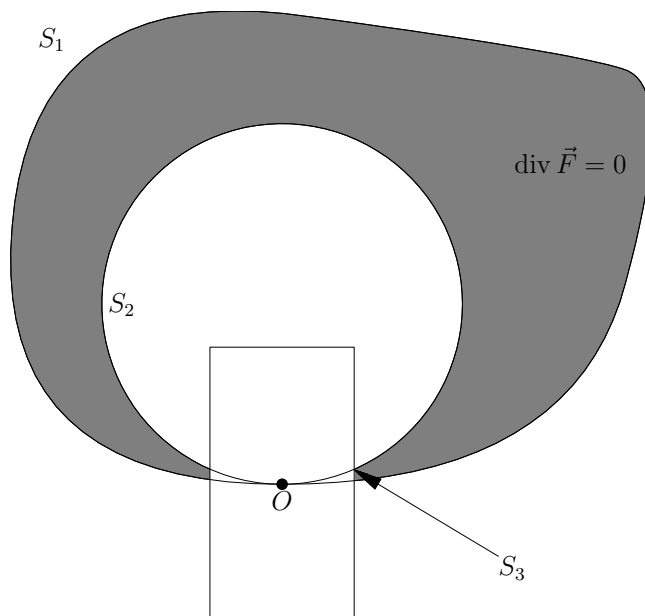
$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} s \sin \vartheta \cos \varphi \\ s \sin \vartheta \sin \varphi \\ s(1 + \cos \vartheta) \end{pmatrix} , \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

ist

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{2s^2(1 + \cos \vartheta)} \quad \text{und} \quad \vec{n}(\vartheta, \varphi) = s^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} .$$

Damit ist der Fluss

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{s^2 \sin \vartheta s (1 + \cos \vartheta)}{(2s^2(1 + \cos \vartheta))^{3/2}} d\varphi d\vartheta &= \frac{2\pi}{2^{3/2}} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 + \cos \vartheta}} d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{2^{3/2}} \left[ -2\sqrt{1 + \cos \vartheta} \right]_0^\pi = 2\pi. \end{aligned}$$



Für ein allgemeines Gebiet kann davon ausgegangen werden, dass das Koordinatensystem so gewählt ist, dass die Ebene  $z = 0$  tangential an die Fläche im Ursprung liegt. Entfernt man nun aus dem Gebiet eine Kugel und vom Rest noch einen Zylinder mit Radius  $\varepsilon < s$  um die  $z$ -Achse, so enthält das schraffierte Restgebiet keine Ladung und der Fluss durch dieses Gebiet ist also Null. Die Oberfläche dieses Gebietes setzt sich aus drei Teilen zusammen. Dabei ist das erste Flächenstück  $S_1$  Teil der Randfläche  $S$  und geht für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $S$  über. Das zweite Flächenstück  $S_2$  wird zur Sphäre  $\tilde{S}$  und das dritte Flächenstück  $S_3$  ist Teil des Zylindermantels. Es ist also

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 = - \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}_3.$$

Mit dem Grenzübergang folgt nun

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

da  $\text{area } S_3 \sim \varepsilon^3$  und  $|\vec{F}| \sim \varepsilon^{-2}$ .

### 2.3.10 Gauß'scher Integralsatz in der Ebene

Für einen regulären ebenen Bereich  $A$  mit orientiertem Rand  $C$

$$C : t \mapsto \vec{r}(t),$$

gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dC = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = (F_x y'(t) - F_y x'(t)) dt.$$

### Beispiel:

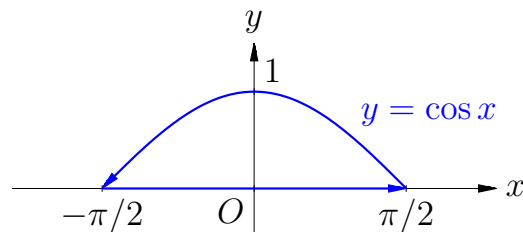
Wir betrachten das ebene Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

über dem Bereich  $A$ , der von der Kurve  $C$ , bestehend aus den zwei Kurvenstücken

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} -t \\ \cos(-t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2], \end{aligned}$$

berandet wird.



Für die linke Seite im Satz von Gauß erhält man

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\cos x} 1 + 1 dy dx = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos x dx = 4.$$

Mit obiger Parametrisierung erhält man für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \times d\vec{r} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-t - \cos^2(-t)) \sin(-t) - (\cos(-t) - t^2)(-1) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 + t \sin t + \cos^2 t \sin t + \cos t - t^2 dt \\ &= [2 \sin t - t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4. \end{aligned}$$

### 2.3.11 Flächenberechnung mit dem Gauß'schen Integralsatz

Der Inhalt einer ebenen Fläche  $A$  mit Rand  $C : t \mapsto \vec{r}(t)$  läßt sich durch

$$\text{area}(A) = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

berechnen. Anstatt  $\vec{r}$  kann auch ein anderes Vektorfeld  $\vec{F}$  mit  $\text{div } \vec{F} = c$  verwendet werden, wobei der Faktor  $1/2$  dann durch den Faktor  $1/c$  zu ersetzen ist.

#### Beispiel:

Es soll der Flächeninhalt des Gebiets  $A$ , das von einer Ellipse  $C$  mit Halbachsenlängen  $a, b > 0$  berandet wird berechnet werden. Die Randkurve  $C$  wird mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert.

Für den Flächeninhalt der Ellipse erhalten wir mit dem Satz von Gauß dann

$$\iint_A 1 \, dA = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin t \, dt \\ b \cos t \, dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \pi ab.$$

### 2.3.12 Aufgaben

#### Aufgabe 2.3.1:

Berechnen Sie für den Einheitswürfel  $W = [0, 1]^3$  und das Vektorfeld  $\vec{F} = \text{grad}(xyz)$  beide im Gauß'schen Integralsatz auftretenden Integrale.

#### Aufgabe 2.3.2:

Das Flächenstück

$$S : x^2 - 4x + y^2 + 2z = 0, \quad z \geq 0$$

und die  $xy$ -Ebene schließen einen Körper  $K$  ein.

- Berechnen Sie das Volumen von  $K$ .
- Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z+1) \\ 0 \\ y^2z + 1 \end{pmatrix}$$

den Fluß von  $F$  durch  $S$  nach außen.

#### Aufgabe 2.3.3:

Berechnen Sie den Fluß eines linearen Feldes  $\vec{F} = A\vec{r}$ , durch die Oberfläche des Einheitswürfels  $[0, 1]^3$ .

**Aufgabe 2.3.4:**

Transformieren Sie das Feld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

auf Zylinderkoordinaten und berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluß durch den Zylinder

$$Z : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b.$$

**Aufgabe 2.3.5:**

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes  $\vec{F} = r^{\alpha-1} \vec{e}_\rho$ ,  $\alpha > 0$ , durch den Kegel  $K : 0 \leq r \leq z$ ,  $0 \leq z \leq b$ .

**Aufgabe 2.3.6:**

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluß des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x + \exp(\sin y) \\ \cos(\exp(x)) + y \end{pmatrix}$$

durch die Ellipse  $C : x^2 + 4y^2 = 4$  nach außen.

**Aufgabe 2.3.7:**

Berechnen Sie den Fluß eines ebenen radialen Vektorfeldes

$$\vec{F} = r^{\alpha-1} \vec{r}, \quad r = |\vec{r}|$$

durch den Rand des Quadrates  $[-s, s]^2$ .

**Aufgabe 2.3.8:**

Berechnen Sie für die Kreisscheibe  $K : x^2 + y^2 \leq 1$  das Integral

$$\iint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dK,$$

wobei  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \exp(\sin(\pi r^2)) \\ y \exp(\cos(\pi r^2)) \end{pmatrix}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ .

**2.3.13 Interaktive Aufgaben****Interaktive Aufgabe 2.3.1:**

Berechnen Sie den Fluß von  $\vec{F} = z^2 \vec{e}_z$  durch die Oberfläche des Körpers

$$K : 0 \leq y \leq 1 - x^2, \quad 0 \leq z \leq 2 - x - y.$$

**Lösung:**

Fluß:  (auf vier Nachkommastellen gerundet)

**Interaktive Aufgabe 2.3.2:**

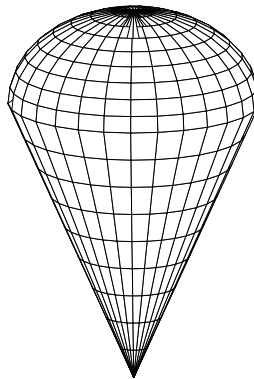
Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$

den Fluß nach außen durch den abgebildeten Körper, der von den Flächen

$$\begin{aligned} S_1 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 4, \quad z \geq 1, \\ S_2 : (z + 5)^2 &= 9(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

begrenzt wird.

**Lösung:**

Fluß:  (auf vier Nachkommastellen gerundet)

## 2.4 Green'sche Integralsätze

### 2.4.1 Erster Green'scher Integralsatz

Sind  $U$  und  $W$  ein- beziehungsweise zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder auf einem räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine reguläre Fläche  $S$  mit nach außen gerichtetem vektoriellem Flächenelement  $d\vec{S}$  berandet ist, so gilt

$$\iint_S U \operatorname{grad} W \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W \, dV.$$

Insbesondere folgt für  $U = 1$

$$\iint_S \operatorname{grad} W \cdot d\vec{S} = \iiint_V \Delta W \, dV.$$

Für Vektorfelder  $\vec{F}$  die ein Potential  $W$  besitzen, ist  $\vec{F} = \operatorname{grad} W$  und  $\Delta W = \operatorname{div} \vec{F}$ . Für diese Felder entspricht die Formel dem Integralsatz von Gauß.

Ein entsprechendes Resultat gilt ebenfalls in der Ebene

$$\int_{\partial A} U \operatorname{grad} W \times d\vec{r} = \iint_A \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W \, dA.$$

**Beweis:**

Ist  $\vec{n}$  die nach außen gerichtete Einheitsnormale, so folgt aus dem Hauptsatz für Mehrfachintegrale

$$\iint_S U \partial_\nu W n_\nu dS = \iiint_V \partial_\nu (U \partial_\nu W) dV.$$

Summation über  $\nu = 1, 2, 3$  liefert die Behauptung.

**2.4.2 Zweiter Green'scher Integralsatz**

Sind  $U$  und  $W$  zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder auf einem räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine reguläre Fläche  $S$  mit nach außen gerichtetem vektoriellem Flächenelement  $d\vec{S}$  berandet ist, so gilt

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV.$$

Ein entsprechendes Resultat gilt ebenfalls in der Ebene.

**Beweis:**

Diese Identität folgt unmittelbar aus dem ersten Green'schen Integralsatz durch Vertauschen von  $U$  und  $W$  und Subtraktion der entsprechenden Identitäten.

**2.4.3 Aufgaben****Aufgabe 2.4.1:**

Die Randkurve  $C$  des Einheitsquadrates  $A = [0, 1]^2$  sei durch  $\vec{r}$  parametrisiert. Bestimmen Sie mit Hilfe der Green'schen Integralsätze die beiden Integrale

$$\text{a) } \int_C (U \operatorname{grad} U) \times d\vec{r} \qquad \text{b) } \int_C (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \times d\vec{r}$$

für die Skalarfelder  $U(x, y) = x^2 e^y$  und  $W(x, y) = xy^2 - 3$ .

**Aufgabe 2.4.2:**

- a) Zeigen Sie, daß  $U(\vec{p}) = |\vec{p} - \vec{q}|^{-1}$  für  $\vec{p} \neq \vec{q}$  harmonisch ist, d.h. daß  $\Delta U = 0$ .
- b) Zeigen Sie mit Hilfe der Green'schen Formel, daß für eine harmonische Funktion  $V$  das Integral der Normalenableitung über eine Kugeloberfläche  $S_s : |\vec{p} - \vec{q}| = s$  verschwindet:

$$\int_{S_s} (\operatorname{grad} V) \cdot d\vec{s} = 0.$$

- c) Wenden Sie nun die Green'sche Formel mit der Funktion  $U$  aus a) auf die Kugelschale  $S_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon$  an und zeigen Sie durch Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ , daß

$$V(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi s^2} \int_{S_\varepsilon} V.$$

### 2.4.4 Interaktive Aufgaben

#### Interaktive Aufgabe 2.4.1:

Gegeben seien das Skalarfeld

$$U(x, y, z) = \frac{x}{2}(1 - y^2) + \frac{z^4}{12},$$

das Vektorfeld  $\vec{F} = \text{grad } U$  und das Ellipsoid

$$S: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des ersten Green'schen Integralsatzes den Fluß des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch  $S$  von innen nach außen.

**Lösung:**

Fluß:   $\pi$

## 2.5 Integralsatz von Stokes

### 2.5.1 Satz von Stokes in der Ebene

Ist  $\vec{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem ebenen regulären Bereich  $A$  mit orientiertem Rand  $C$ , so gilt

$$\iint_A \text{rot } \vec{F} \, dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei  $\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$ .

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

**Beweis:**

Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Hauptsatz für zweidimensionale Integrale, denn für eine Parametrisierung  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  von  $C$  ist

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$$

die nach außen gerichtete Normale. Da  $|\vec{r}'| = |\vec{n}|$  folgt für das Arbeitsintegral

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C -F_x n_y + F_y n_x \, dt \\ &= \iint_A -\partial_y F_x + \partial_x F_y \, dA \end{aligned}$$

und dies entspricht dem Gebietsintegral über die Rotation von  $\vec{F}$ .

**Beispiel:**

Wir betrachten das ebene Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

auf der Einheitskreisscheibe

$$K : x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Für die linke Seite im Satz von Stokes erhält man

$$\iint_K (\partial_x F_y - \partial_y F_x) dK = \iint_K c - b dK = \pi(c - b).$$

Parametrisiert man den Rand von  $K$  mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

so erhält man für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ c \cos t + d \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -a \sin t \cos t - b \sin^2 t + c \cos^2 t + d \sin t \cos t dt \\ &= \pi(c - b) \end{aligned}$$

da

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.$$

**2.5.2 Singuläres wirbelfreies Feld**

Wir betrachten das ebene Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

auf der Kreisscheibe

$$K : x^2 + y^2 \leq r, \quad r > 0.$$

Obwohl die Rotation von  $\vec{F}$  verschwindet,

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

ist das Arbeitsintegral über den Rand  $C$  von  $K$  nicht Null. Verwendet man

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

als Parametrisierung für  $C$ , so erhält man für

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-r \sin t}{r^2} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} r \cos t dt = \frac{2\pi}{\neq} 0.$$

Dies ist kein Widerspruch zum Satz von Stokes, weil das Vektorfeld  $\vec{F}$  im Inneren der Kreisscheibe bei  $(0,0)$  eine Singularität besitzt.

### 2.5.3 Satz von Stokes

Ist  $\vec{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer regulären Fläche  $S$  mit orientiertem Rand  $C$ , so gilt

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Beweis:**

Die Identität kann mit Hilfe eines geeigneten ebenen Vektorfeldes auf die Kettenregel und den Satz von Stokes in der Ebene zurückgeführt werden.

Für ein Vektorfeld  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^t$  und eine Parametrisierung der Fläche

$$S: \quad \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} r_1(u, v) \\ r_2(u, v) \\ r_3(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in A$$

mit Randkurve

$$C: \quad \vec{c}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} r_1(u(t), v(t)) \\ r_2(u(t), v(t)) \\ r_3(u(t), v(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

ist

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})(\vec{r}) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} (\partial_j F_k)(\vec{r}) \vec{e}_i, \\ \vec{n}(u, v) &= \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{lmn} \partial_u r_m \partial_v r_n \vec{e}_l \end{aligned}$$

und

$$c'_i(t) = (\partial_u r_i)(u(t), v(t)) u'(t) + (\partial_v r_i)(u(t), v(t)) v'(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Berücksichtigt man die Orthogonalität der Einheitsvektoren  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{i,l}$  und entfernt die Terme bei denen das Produkt  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilmn}$  der  $\varepsilon$ -Tensoren gleich Null ist, so erhält man

$$\begin{aligned} I_S &= (\operatorname{rot} \vec{F})(\vec{r}) \cdot \vec{n} \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 (\partial_j F_k)(\vec{r}) \partial_u r_j \partial_v r_k \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 (\partial_j F_k)(\vec{r}) \partial_u r_k \partial_v r_j \end{aligned}$$

für den Integranden des Flußintegrals und

$$\begin{aligned} I_C &= f(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot \vec{c}'(t) \\ &= \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}(u(t), v(t))) ((\partial_u r_k)(u(t), v(t))u'(t) + (\partial_v r_k)(u(t), v(t))v'(t)) \end{aligned}$$

für den Integranden des Arbeitsintegrals.  
Andererseits gilt für das ebene Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} G_1(u, v) \\ G_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}(u, v)) (\partial_u r_k)(u, v) \\ \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}(u, v)) (\partial_v r_k)(u, v) \end{pmatrix}$$

nach dem Satz von Stokes in der Ebene

$$\iint_A \partial_u G_2 - \partial_v G_1 dA = \int_{t_0}^{t_1} G_1(u(t), v(t))u'(t) + G_2(u(t), v(t))v'(t) dt.$$

Der Integrand der rechten Seite ist dabei

$$\begin{aligned} G_1(u(t), v(t))u'(t) + G_2(u(t), v(t))v'(t) &= \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}(u(t), v(t))) (\partial_u r_k)(u(t), v(t))u'(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}(u(t), v(t))) (\partial_v r_k)(u(t), v(t))v'(t) \end{aligned}$$

und somit gleich  $I_C$ . Der Integrand der linken Seite ist aufgrund der Kettenregel gleich

$$\begin{aligned} \partial_u G_2 - \partial_v G_1 &= \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\partial_j F_k)(\vec{r}) \partial_u r_j \partial_v r_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}) \partial_u \partial_v r_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\partial_j F_k)(\vec{r}) \partial_v r_j \partial_u r_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 F_k(\vec{r}) \partial_v \partial_u r_k. \end{aligned}$$

und ergibt nach Vereinfachung  $I_S$ .

### Beispiel:

Als Beispiel wird der Fluss der Rotation des räumlichen Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

durch die Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

betrachtet. Als Parametrisierung für die Randkurve  $C$  wird

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit

$$(\vec{r}')^\circ = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

verwendet. Mit der Parametrisierung

$$\vec{s}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

für die Halbkugelschale ergibt sich

$$\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \vartheta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Für die Rotation von  $\vec{F}$  gilt

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit für die linke Seite im Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \vartheta + \sin \varphi \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta \\ &= 0 + 0 + 2\pi \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi. \end{aligned}$$

Betrachtet man statt der Halbkugelschale die Kreisscheibe

$$K : \vec{s}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

mit gleichem Rand  $C$ , so bleibt die rechte Seite unverändert, während sich für die linke in Polarkoordinaten ebenfalls

$$\iint_K \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{K} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \, d\varphi dr = \pi$$

ergibt.

### 2.5.4 Kreisförmige Strömung

Eine typische wirbelförmige Strömung um die  $z$ -Achse wird durch das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = f(\varrho) \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

beschrieben mit

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f' + \varrho^{-1} f \end{pmatrix}$$

nach den Rechenregeln für die Rotation in Zylinderkoordinaten.

Gesucht ist nun der Fluß von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  durch die Kreisscheibe  $S$  in der  $xy$ -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $a > 0$ . Wählt man für die Parametrisierung der Randkurve  $C$

$$C: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

so erhält man mit Hilfe des Satzes von Stokes

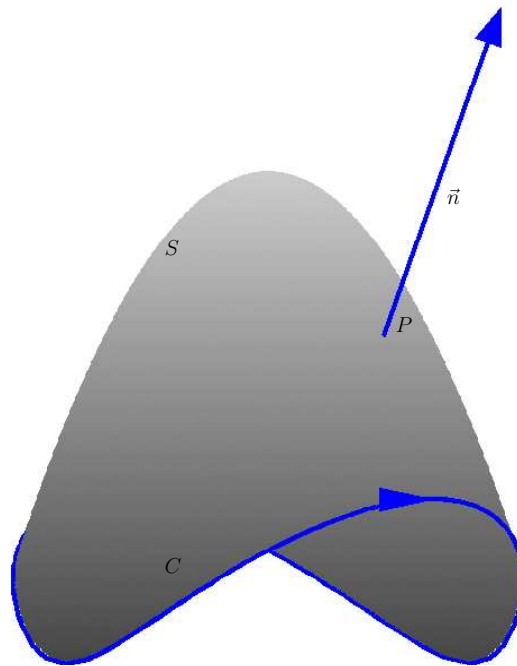
$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} f(a) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= 2\pi a f(a). \end{aligned}$$

Für das Rechteck  $R = [-a, a] \times [-b, b]$  in der  $xy$ -Ebene erhält man für den Spezialfall  $f(\varrho) = \varrho$

$$\iint_R \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{R} = \iint_R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dR = 8ab.$$

### 2.5.5 Koordinatenfreie Definition der Rotation

Sei  $P$  ein Punkt auf einer regulären Fläche  $S$  mit Normale  $\vec{n}$  und orientiertem Rand  $C: t \mapsto \vec{r}(t)$ .



Dann läßt sich die normale Komponente der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\vec{F}$  als Grenzwert von Arbeitsintegralen definieren:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Das Skalarprodukt auf der linken Seite wird als Wirbelstärke von  $\vec{F}$  um  $\vec{n}(P)$  bezeichnet und ist für  $\vec{n}(P) \parallel \text{rot } \vec{F}$  am größten.

Diese geometrische Charakterisierung der Rotation folgt unmittelbar aus dem Satz von Stokes und dem Mittelwertsatz. Sie zeigt insbesondere, daß  $\text{rot } \vec{F}$  invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist.

### Beispiel:

Als Beispiel wird das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf Kreisscheiben  $S$  in der  $xy$ -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $a > 0$  betrachtet. Der Rand  $C$  von  $S$  wird dabei mit

$$C: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

parametrisiert. Man erhält

$$\begin{aligned} \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^2 dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2\pi a^2}{\pi a^2} = 2, \end{aligned}$$

was mit

$$\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

übereinstimmt.

### 2.5.6 Variante des Integralsatzes von Stokes

Für ein stetig differenzierbares Skalarfeld  $U$  auf einer regulären Fläche  $S$  mit orientiertem Rand  $C$  gilt

$$-\iint_S (\text{grad } U) \times d\vec{S} = \int_C U d\vec{r}.$$

**Beweis:**

Die Aussage läßt sich auf den Integralsatz von Stokes zurückführen, wenn man die Komponenten einzeln betrachtet. Für die erste Komponente hat die Aussage die Gestalt

$$\iint_S n_y^\circ \partial_z U - n_z^\circ \partial_y U dS = \int_C U r'_x(t) dt.$$

Dies entspricht dem Satz von Stokes mit

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn hier ist

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z U \\ -\partial_y U \end{pmatrix}.$$

Die anderen Komponenten erhält man analog mit Vektorfeldern, die  $U$  in der zweiten bzw. in der dritten Komponente haben.

### 2.5.7 Wirbelfreie Felder

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  gilt genau dann  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , wenn

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $C \subset D$ .

Insbesondere ist für ein wirbelfreies Feld das Arbeitsintegral wegunabhängig, d.h.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

für Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.

### Beweis:

Ist  $\text{rot } \vec{F} = 0$  so verschwindet das Arbeitsintegral aufgrund des Satzes von Stokes.

Ist andererseits

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $C \subset D$ , so folgt aus der koordinatenfreien Definition der Rotation, dass diese an jedem Punkt in  $D$  verschwindet.

## 2.5.8 Aufgaben

### Aufgabe 2.5.1:

Berechnen Sie für die obere Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} (1-x)z \\ (1-y)x \\ (1-z)y \end{pmatrix}$$

beide im Satz von Stokes auftretenden Integrale.

### Aufgabe 2.5.2:

Berechnen Sie für das Vektorfeld  $g = (xz, yz, 2z^2)^t$  möglichst einfach das Integral

$$\iint_S \text{rot } g \cdot n \, dO,$$

wobei die Fläche  $\mathcal{S}$

a) die Halbkugel  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,

b) die Wendelfläche  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ,  $z = ht/(2\pi)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ ,  $0 \leq r \leq a$  ist.

### Aufgabe 2.5.3:

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \ln(1+z^2) \\ y \arctan x^2 \\ \ln(2+\cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von  $\vec{F}$  längs des positiv orientierten Kreises  $K : x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 3$ .

b) Bestimmen Sie den Fluß von  $\text{rot } \vec{F}$  durch den Kreis  $K : x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $z = 0$  nach oben.

- c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluß von  $\text{rot } \vec{F}$  durch den Zylindermantel  $S : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$  nach außen.

**Aufgabe 2.5.4:**

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \cdot \sin(\pi x) \\ (x-1) \cdot \exp(z) \\ yz \end{pmatrix}$$

und das Flächenstück

$$S : z = 1 - x^2, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0.$$

- a) Beschreiben Sie  $S$  und die Randkurve  $C$ . Aus wieviel glatten Teilstücken besteht  $C$ ? Geben Sie Parameterdarstellungen für die Kurvenstücke an, aus denen sich  $C$  zusammensetzt.
- b) Berechnen Sie den Normalenvektor  $\vec{n}$  von  $S$  mit positiver  $z$ -Komponente als Funktion von  $z$ .
- c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Flächenintegral

$$\int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

**Aufgabe 2.5.5:**

Illustrieren Sie die Sätze von Green, Gauß und Stokes für eine Halbkugel

$$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ y^3 - x^4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.5.6:**

Illustrieren Sie die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes für die Halbkugel

$$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$$

und die Felder

$$U = xy, \quad W = x^2 + xy, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 2x^2y + xy^2 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.5.9 Interaktive Aufgaben

**Interaktive Aufgabe 2.5.1:**

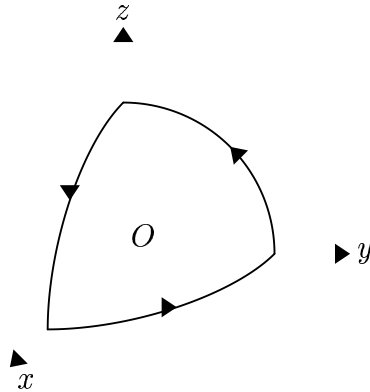
Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$f = ((xy)^{1+z}, 0, z^{(1+xy)}), \quad x, y, z \geq 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluss von  $\operatorname{rot} f$  durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.



### Lösung:

Die Rotation des Vektorfeldes lautet

keine Angabe  $\bigcirc$ ,

$$(x \ln(z) z^{(1+z)}, \ln(xy)(xy)^{(1+xy)} - y \ln z z^{1+z}, -x(xy)^z(1+xy)) \bigcirc$$

$$(x \ln(z) z^{(1+xy)}, \ln(xy)(xy)^{1+z} - y \ln(z) z^{(1+xy)}, -x(xy)^z(1+z)) \bigcirc$$

$$(xy \ln(z) z^{(2+xy)}, \ln(x)(xy)^{1+z} - yz^{(1+xy)}, -x(xyz)^z(1+z)) \bigcirc$$

Fluss =

Als Dezimalzahl auf drei Nachkommastellen gerundet angeben.



# Kapitel 3

## Potentialtheorie

### 3.1 Skalares Potential

#### 3.1.1 Potential eines Gradientenfeldes

Ist

$$\vec{F} = \text{grad } U,$$

so bezeichnet man  $U$  als Potential des Vektorfeldes  $\vec{F}$ . Für ein solches Gradientenfeld ist das Arbeitsintegral wegunabhängig und kann als Potentialdifferenz berechnet werden. Für jeden Weg

$$C : t \mapsto \vec{r}(t), \quad t \in [a, b]$$

von  $A : \vec{a} = \vec{r}(a)$  nach  $B : \vec{b} = \vec{r}(b)$  gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A),$$

wobei in Anlehnung an die Schreibweise einer Stammfunktion für  $U(B) - U(A)$  auch  $[U]_A^B$  geschrieben wird.

Insbesondere ist  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  für geschlossene Wege  $C$ .

**Beweis:**

Definiert man  $\psi(t) = U(\vec{r}(t))$  so gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$U(B) - U(A) = \psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt$$

und nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \text{grad } U \cdot \vec{r}'(t).$$

Damit folgt

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt = \int_a^b \text{grad } U \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Beispiel:**

Als Beispiel wird das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

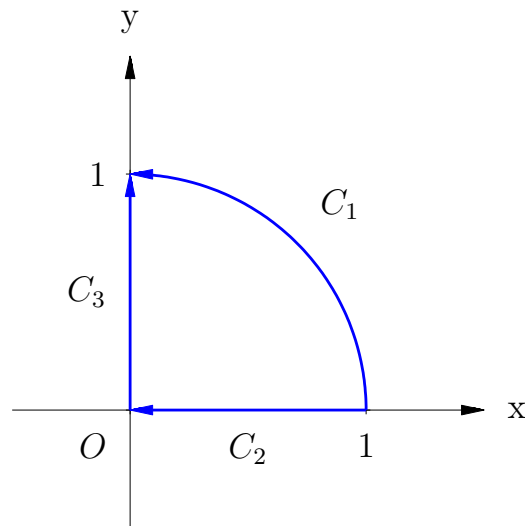
und die Wege

$$C_1: \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

$$C_2: \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$C_3: \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

betrachtet.



Für das Arbeitsintegral von  $(1, 0)$  nach  $(0, 1)$  entlang  $C_1$  erhält man

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} -2 \sin t \cos t dt \\ &= [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1, \end{aligned}$$

und entlang  $C_2 + C_3$

$$\begin{aligned} \int_{C_2+C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -1 dt = [-t]_0^1 = -1. \end{aligned}$$

Verwendet man das Potential

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

von  $\vec{F}$ , so erhält man für beliebige Wege  $C$  zwischen den Punkten  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  ebenfalls

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(0, 1) - U(1, 0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

### 3.1.2 Potential eines radialen Feldes

Für ein radialsymmetrisches Skalarfeld

$$U(x, y, z) = \psi(r)$$

gilt

$$\text{grad } U = \psi' \vec{e}_r.$$

Deshalb besitzt ein radiales Vektorfeld  $\vec{F} = f\vec{e}_r$  immer ein Potential. Man muss lediglich die Stammfunktion von  $f$  bilden.

Beispielsweise ist für das Gravitationsfeld mit  $f(r) = -\gamma r^{-2}$ , d. h.

$$\vec{F}(x, y, z) = -\gamma r^{-2} \vec{e}_r,$$

durch  $U = \gamma r^{-1}$  ein Potential definiert.

Um von einem Punkt  $P$  aus das Gravitationsfeld zu verlassen, muss damit die Arbeit

$$\lim_{|\vec{q}| \rightarrow \infty} \gamma/|\vec{q}| - \gamma/|\vec{p}| = -\gamma/|\vec{p}|$$

aufgewendet werden. Setzt man dies zur kinetischen Energie  $(m/2)v^2$  in Beziehung, so wird bei einem antriebslosen Flug eine Startgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{m|\vec{p}|}}$$

benötigt.

### 3.1.3 Existenz eines Potentials

Für ein stetiges Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einem Gebiet  $D$  existiert ein Potential  $U$  genau dann, wenn das Arbeitsintegral wegunabhängig ist. In diesem Fall ist

$$U(P) = U(P_0) + \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

wobei  $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$  eine beliebige in  $D$  verlaufende Kurve ist, die einen fest gewählten Punkt  $P_0 \in D$  mit  $P$  verbindet. Insbesondere ist  $U$  bis auf eine Konstante (den Wert  $U(P_0)$ ) eindeutig bestimmt.

**Beweis:**

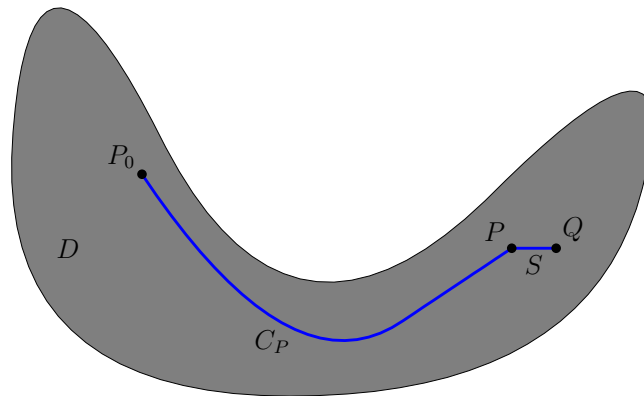
Die Notwendigkeit der Wegunabhängigkeit folgt aus

$$\int_C \text{grad } U \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P)$$

für jede die Punkte  $P$  und  $Q$  verbindende Kurve  $C$ .

Dass die Wegunabhängigkeit hinreichend ist, ergibt sich aus folgender Überlegung.

Da  $D$  offen ist, gibt es zu einem Punkt  $P$  einen Wert  $h > 0$  so, dass für  $\vec{q} = \vec{p} + h\vec{e}_i$  die gesamte Strecke  $S = \overline{PQ}$  in  $D$  enthalten ist.



Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals kann man nun für den Wert  $U(Q)$  den Weg  $C_P$  zu  $P$  mit der Strecke  $S$  ergänzen. Dann ergibt sich für die Potentialdifferenz

$$U(Q) - U(P) = \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Mit der Parametrisierung

$$S : \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{e}_i, t \in [0, h]$$

ist

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \vec{F}(\vec{p} + t\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i dt = \int_0^h F_i(\vec{p} + t\vec{e}_i) dt.$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert

$$\int_0^h F_i(\vec{p} + t\vec{e}_i) dt = hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i), \quad \tau \in [0, h].$$

Für die  $i$ -te Komponente des Gradienten folgt also

$$\partial_i U(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(\vec{p} + h\vec{e}_i) - U(\vec{p})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)}{h} = F_i(P).$$

Somit ist  $U$  tatsächlich ein Potential für  $\vec{F}$ .

**Beispiel:**

Zu bestimmen ist das Potential des ebenen Vektorfelds

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y \end{pmatrix}.$$

Als festen Punkt  $P_0$  wählen wir den Ursprung, und als Kurve von  $O$  nach  $P$  die direkte Verbindung

$$C_P: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} p_1 t \\ p_2 t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Für die Potentialfunktion  $U$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(p_2 t) \\ p_1 t \cos(p_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 p_1 \sin(p_2 t) + p_1 p_2 t \cos(p_2 t) dt = [p_1 t \sin(p_2 t)]_0^1 = p_1 \sin p_2. \end{aligned}$$

**3.1.4 Integrabilitätsbedingung**

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einer offenen Menge  $D$  ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

notwendig für die Existenz eines Potentials. Ist  $D$  einfach zusammenhängend, so ist die Wirbelfreiheit ebenfalls hinreichend.

**Beweis:**

Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Ist  $\vec{F} = \operatorname{grad} U$  so folgt

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i = \partial_i \partial_j U - \partial_j \partial_i U = 0.$$

Ist  $D$  einfach zusammenhängend, so berandet jede geschlossene Kurve  $C$  eine Fläche  $S$  in  $D$ . Der Satz von Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

impliziert damit die Wegunabhängigkeit.

**Beispiel:**

Für ein lineares Feld

$$\vec{F} = A\vec{r}, \quad A = (a_{j,k})$$

ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} a_{3,2} - a_{2,3} \\ a_{1,3} - a_{3,1} \\ a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Ein Potential existiert also genau dann, wenn  $A$  symmetrisch ist und ist in diesem Fall durch

$$U = \frac{1}{2} \vec{r}^t A \vec{r}$$

gegeben.

### Beispiel:

Differenziert man das Skalarfeld

$$U = \arctan(y/x) = \varphi,$$

so erhält man

$$\vec{F} = \text{grad } U = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = r^{-3} \vec{e}_\varphi.$$

Bis auf die Singularität im Ursprung erfüllt dieses Feld die Integrabilitätsbedingung:

$$\partial_y F_x - \partial_x F_y = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Dennoch ist das Arbeitsintegral auf einem Kreis  $K$  um den Ursprung nicht Null:

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Obwohl  $\vec{F} = \text{grad } U$  gilt, existiert kein Potential. Dies liegt an der Singularität im Ursprung. Das Gebiet, auf dem die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind ist, ist nicht einfach zusammenhängend. Die Problematik wird auch klar, wenn man berücksichtigt, dass die Funktion  $U = \varphi$  auf einem Kreisring um den Ursprung nicht stetig definiert werden kann. Natürlich existiert ein Potential (nämlich  $U = \varphi$ ) auf jeder einfach zusammenhängenden Menge, die den Ursprung nicht enthält.

### 3.1.5 Konstruktion eines Potentials

Besitzt ein Vektorfeld  $\vec{F}$  ein Potential  $U$ , so kann dieses durch sukzessive Integration konstruiert werden. Bilden einer Stammfunktion bzgl. der ersten Variablen liefert

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z).$$

Nun folgt aus  $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$

$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1) dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

und schließlich aus  $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) dz = U_3(z) + c.$$

Insgesamt ergibt sich

$$U(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c.$$

**Beweis:**

Die Integrabilitätsbedingung  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$  garantiert, dass  $F_y - \partial_y U_1$  nicht von  $x$  und  $F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2$  weder von  $x$  noch von  $y$  abhängt, die Definitionen von  $U_2$  und  $U_3$  also gerechtfertigt sind. Es ist nämlich

$$\partial_x(F_y - \partial_y U_1) = \partial_x F_y - \partial_y \partial_x U_1 = \partial_x F_y - \partial_y F_x = 0.$$

Analog gilt

$$\partial_x(F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) = \partial_x F_z - \partial_z \partial_x U_1 - \partial_z \partial_x U_2 = \partial_x F_z - \partial_z F_x - 0 = 0,$$

und

$$\partial_y(F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) = \partial_y F_z - \partial_z \partial_y(U_1 + U_2) = \partial_y F_z - \partial_z F_y = 0.$$

**Beispiel:**

Es wird das Potential  $U$  des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

gesucht.

Integration von  $F_x$  nach  $x$  liefert

$$\int F_x dx = \int 2x + 3z - yz dx = \underbrace{x^2 + 3xz - xyz}_{U_1(x,y,z)} + C_1(y, z).$$

Für die Integration nach  $y$  erhält man

$$\int F_y - \partial_y U_1 dy = \int -2y - xz + xz dy = \underbrace{-y^2}_{U_2(y,z)} + C_2(z),$$

und nach der Integration nach  $z$  schließlich

$$\int F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2 dz = \int 2 + 3x - xy - 3x + xy dz = \underbrace{2z}_{U_3(z)} + c.$$

Somit ergibt sich für das Potential

$$U(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c = x^2 + 3xz - xyz - y^2 + 2z + c$$

mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel:**

Für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + \alpha x^2 y \\ x^3 + 4y^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 3x^2 - \alpha x^2.$$

Damit das Feld ein Potential besitzt, muss also  $\alpha = 3$  gelten.

Aus

$$\partial_x U = F_x = 2x + 3x^2 y$$

folgt

$$U = x^2 + x^3 y + C_1(y),$$

und die zweite Bedingung  $\partial_y U = F_y$  liefert

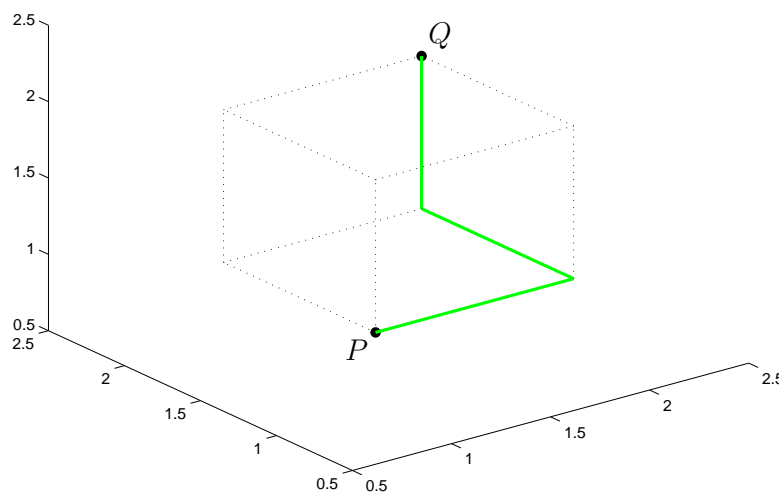
$$x^3 + C_1'(y) = x^3 + 4y^3 \Rightarrow C_1(y) = y^4 + c.$$

Damit ergibt sich insgesamt  $U = x^2 + x^3 y + y^4 + c$  als Potentialfunktion für  $\vec{F}, \alpha = 3$ .

**3.1.6 Hakenintegral**

Berechnet man ein Potential  $U$  eines Vektorfeldes  $\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U$  mit Hilfe des Arbeitsintegrals, so kann aufgrund der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals ein Weg von  $P$  nach  $Q$  gewählt werden, der parallel zu den Koordinatenachsen verläuft. Wählt man den Weg, der zunächst parallel zur  $x$ -, dann parallel zur  $y$ - und zuletzt parallel zur  $z$ -Achse verläuft, ergibt sich für das Potential das Hakenintegral

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3) dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3) dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz.$$



Durch Permutation der Koordinaten ergeben sich noch 5 weitere mögliche Hakenintegrale. Man wählt daraus dasjenige aus, bei dem die Integranden möglichst einfach werden. Meist ist es günstig für  $P$  den Ursprung zu wählen.

**Beispiel:**

Für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

und den Potentialwert  $U(O) = 0$  im Ursprung ergibt das Hakenintegral

$$\begin{aligned} U(P) &= U(0) + \int_0^{p_1} F_x(x, 0, 0) dx + \int_0^{p_2} F_y(p_1, y, 0) dy + \int_0^{p_3} F_z(p_1, p_2, z) dz \\ &= \int_0^{p_1} 2x dx + \int_0^{p_2} -2y dy + \int_0^{p_3} 2 + 3p_1 - p_1 p_2 dz \\ &= p_1^2 - p_2^2 - 2p_3 + 3p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3. \end{aligned}$$

**3.1.7 Aufgaben****Aufgabe 3.1.1:**

Bestimmen Sie für die Vektorfelder

$$(2x + 2z, z^2, 2x + 2yz)^t, \left( \frac{y+z}{z}, \frac{x-z}{z}, -\frac{xy}{z^2} \right)^t, (x \sin yz, y \cos yz, -\sin yz)^t$$

den Definitionsbereich und eine Potentialfunktion, falls diese existiert.

**Aufgabe 3.1.2:**

Bestimmen Sie die Potentialfunktion für die Vektorfelder

$$|x+y|^{-1} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x+y)^{-2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

falls diese existiert.

**Aufgabe 3.1.3:**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin z \\ 2yz \\ x \cos z + y^2 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, daß  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ , und bestimmen Sie das zugehörige Potential  $U$ .
- Berechnen Sie das Arbeitsintegral entlang des Wegs

$$C : \vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)^t, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

sowohl direkt als auch mit Hilfe des in Teil **a)** bestimmten Potentials.

**Aufgabe 3.1.4:**

- a) Für welches  $\alpha \in \mathbb{R}$  besitzt das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \alpha xy \exp(-(x^2 + 2y^2)) \\ (1 - 4y^2) \exp(-(x^2 + 2y^2)) \end{pmatrix}$$

ein Potential  $U$  und wie ist dessen Form?

- b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von  $U$ .

- c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral von  $\vec{F}$  längs der Kurve

$$x = t^2 \sin 2t, \quad y = \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

für den in a) ermittelten Wert von  $\alpha$ . Gibt es einen Weg  $C$  mit  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$ ?

**Aufgabe 3.1.5:**

Gegeben seien die für  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definierten Vektorfelder

$$g_1(x, y) = \left( \frac{-y + 3x}{x^2 + y^2}, \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} \right)^t \quad \text{und}$$

$$g_2(x, y) = \left( \frac{xe^r}{r}, \frac{ye^r}{r} \right)^t \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- a) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral entlang des gegen den Uhrzeiger orientierten Einheitskreises.
- b) Besitzen die Vektorfelder im Rechteck  $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$  eine Potentialfunktion?
- c) Besitzen die Vektorfelder in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine Potentialfunktion? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

**Aufgabe 3.1.6:**

Gegeben ist das Kraftfeld

$$F = \begin{pmatrix} x^2 + 5\lambda y + 3yz \\ 5x + 3\lambda xz - 2 \\ (\lambda + 2)xy - 4z \end{pmatrix}.$$

Für welches  $\lambda$  besitzt dieses Feld ein Potential? Wie gross ist in diesem Fall die Arbeit längs der Schraubenlinie

$$x = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)?$$

Versuchen Sie später, die Arbeit auch für andere  $\lambda$  zu berechnen.

### 3.1.8 Interaktive Aufgaben

#### Interaktive Aufgabe 3.1.1:

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$f = (-4xy, 6y - ax^2 - z^2, -2yz)^t$$

das Arbeitsintegral über den Weg  $(\sqrt{t}, t, t^2)$  von  $P = (0, 0, 0)$  nach  $Q = (1, 1, 1)$ .

Für welches  $a$  besitzt  $f$  eine Potentialfunktion  $\varphi$ ? Bestimmen Sie  $\varphi$  und alle Punkte  $R$ , die von  $P$  in dem Feld  $\text{grad } \varphi$  ohne Arbeit erreichbar sind.

#### Lösung:

$$\text{Arbeitsintegral} = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}a + \boxed{\phantom{00}}a^2$$

$\varphi$  existiert für  $a = \boxed{\phantom{00}}$

$$\varphi(x, y, z) = y \left( \begin{array}{l} \boxed{\phantom{00}}x^2 + \boxed{\phantom{00}}y^2 + \boxed{\phantom{00}}z^2 + \\ \boxed{\phantom{00}}xy + \boxed{\phantom{00}}xz + \boxed{\phantom{00}}yz + \\ \boxed{\phantom{00}}x + \boxed{\phantom{00}}y + \boxed{\phantom{00}}z \end{array} \right)$$

Die Punkte  $R$  liegen in der

keine Angabe ,  $xy$ -Ebene ,  $xz$ -Ebene ,  $yx$ -Ebene

oder auf dem Paraboloid  $3y = \boxed{\phantom{00}}x^2 + \boxed{\phantom{00}}z^2$

Alle Eingaben als ganze Zahlen.

#### Interaktive Aufgabe 3.1.2:

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+y^2} \\ \frac{2y - \alpha x^2 y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie  $\alpha = \alpha^*$  so, daß das Vektorfeld  $f$  ein Potential  $\varphi$  besitzt und bestimmen Sie dieses. Wählen Sie dabei die Integrationskonstante  $C$  so, daß  $\varphi(0, 0) = 0$ .

b) Die Äquipotentiallinien

$$K_c := \{(x, y) : \varphi(x, y) = c\}$$

sind Kegelschnitte. Bestimmen Sie den Typ von  $K_c$  (Ellipse, Parabel usw.) in Abhängigkeit vom Parameter  $c \geq 0$ .

#### Lösung:

a)  $\alpha^* = \boxed{\phantom{00}}$

$C = \boxed{\phantom{00}}$

Das Potential  $\varphi$  ist damit:  $\varphi(x, y) = (\boxed{\phantom{00}}x^2 + \boxed{\phantom{00}}y^2) / (\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}y^2)$ .

b) Der Typ des Kegelschnittes in den angegebenen Bereichen ist:

- |               |  |
|---------------|--|
| $c = 0$ :     | keine Angabe <input type="radio"/> , Punkt <input type="radio"/> , zwei parallele Geraden <input type="radio"/> , Hyperbel <input type="radio"/> , Ellipse <input type="radio"/> . |
| $0 < c < 1$ : | keine Angabe <input type="radio"/> , Punkt <input type="radio"/> , zwei parallele Geraden <input type="radio"/> , Hyperbel <input type="radio"/> , Ellipse <input type="radio"/> . |
| $c = 1$ :     | keine Angabe <input type="radio"/> , Punkt <input type="radio"/> , zwei parallele Geraden <input type="radio"/> , Hyperbel <input type="radio"/> , Ellipse <input type="radio"/> . |
| $c > 1$ :     | keine Angabe <input type="radio"/> , Punkt <input type="radio"/> , zwei parallele Geraden <input type="radio"/> , Hyperbel <input type="radio"/> , Ellipse <input type="radio"/> . |

## 3.2 Vektorpotential

### 3.2.1 Vektorpotential

Ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  als Rotation eines anderen Vektorfeldes  $\vec{A}$  darstellbar,

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A},$$

so wird  $\vec{A}$  als Vektorpotential von  $\vec{F}$  bezeichnet.

#### Beispiel:

Aus der Identität

$$\text{rot}(U\vec{G}) = U \text{rot } \vec{G} + (\text{grad } U) \times \vec{G}$$

erhält man für

$$U = \vec{a} \cdot \vec{r}, \quad \vec{G} = \vec{r}$$

wegen  $\text{rot } \vec{r} = 0$

$$\text{rot}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}.$$

Also ist  $A = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$  ein Vektorpotential für das Feld  $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$ .

### 3.2.2 Existenz eines Vektorpotentials

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  besitzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  genau dann ein Vektorpotential  $\vec{A}$ , wenn  $\vec{F}$  quellenfrei ist:

$$\exists \vec{A}: \quad \vec{F} = \text{rot } \vec{A} \Leftrightarrow \text{div } \vec{F} = 0$$

auf  $D$ .

Das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld eines beliebigen Skalarfeldes  $U$  eindeutig bestimmt:

$$\vec{B} = \vec{A} + \text{grad } U \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Wählt man  $U$  als Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta U = \text{div } \vec{A}$$

so ist  $\text{div } \vec{B} = 0$ , d.h. man erhält ein quellenfreies Vektorpotential. Eine solche spezielle Wahl wird als Eichung des Vektorpotentials bezeichnet.

#### Beweis:

Die Notwendigkeit der Quellenfreiheit folgt unmittelbar aus

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$$

für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}$ .

Gilt

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{B},$$

so ist  $\vec{A} - \vec{B}$  rotationsfrei und besitzt also ein skalares Potential  $U$ .

### 3.2.3 Konstruktion eines Vektorpotentials

Für ein quellenfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$ , läßt sich durch

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential definieren, wenn die Integranden an den entsprechenden Punkten definiert sind. Dies ist zum Beispiel der Fall für einen Elementarbereich der Form

$$\begin{aligned} b_1 &< y < b_2 \\ c_1(y) &< z < c_2(y) \\ a_1(y, z) &< x < a_2(y, z) \end{aligned} .$$

Analoge Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} - \int_{y_0}^y F_z(x, \eta, z) d\eta \\ 0 \\ \int_{y_0}^y F_x(x, \eta, z) d\eta - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y_0, z) d\xi \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z F_y(x, y, \zeta) d\zeta - \int_{y_0}^y F_z(x, \eta, z_0) d\eta \\ - \int_{z_0}^z F_x(x, y, \zeta) d\zeta \\ 0 \end{pmatrix} .$$

**Beweis:**

Für

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

ist

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_y \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi - \partial_z \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi + \partial_z \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \partial_x \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \end{pmatrix} .$$

Da  $\vec{F}$  stetig differenzierbar ist, kann das Differenzieren und Integrieren vertauscht werden und es ergibt sich

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\int_{x_0}^x \partial_y F_y(\xi, y, z) d\xi - \int_{x_0}^x \partial_z F_z(\xi, y, z) d\xi + F_x(x_0, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Da  $\vec{F}$  quellenfrei ist gilt  $\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = 0$ . Die beiden Integrale im ersten Eintrag lassen sich also durch das Integral über  $\partial_x F_x$  ersetzen und der letzte Summand hebt den Wert an der unteren Grenze auf.

### Beispiel:

Es soll ein Vektorpotential zu dem Vektorfeld

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Da  $\operatorname{div} \vec{F} = 0+0+0$  ist existiert ein solches Vektorpotential  $\vec{A}$ . Als Basispunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  wird der Ursprung gewählt. Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^x F_z(x, y, z) dx &= \int_0^x a_1 y - a_2 x dx = a_1 x y - a_2 x^2/2 \\ \int_0^z F_x(0, y, z) dz &= \int_0^z a_2 z - a_3 y dz = a_2 z^2/2 - a_3 y z \\ \int_0^x F_y(x, y, z) dx &= \int_0^x a_3 x - a_1 z dx = a_3 x^2/2 - a_1 x z \end{aligned}$$

und damit

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 x y + a_3 y z - (x^2 + z^2)a_2/2 \\ a_3 x^2/2 - a_1 x z \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorpotential weist nicht mehr die Symmetrie des Vektorfeldes auf. Dies liegt an der unsymmetrischen Konstruktionsweise. Ein symmetrisches Vektorpotential für  $\vec{F}$  ist

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_2 x y - a_1 y^2/2 \\ a_3 y z - a_2 z^2/2 \\ a_1 x z - a_3 x^2/2 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.4 Vektorpotential eines zweidimensionalen Feldes

Für ein quellenfreies zweidimensionales Feld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

ist für  $\vec{G} = (-F_y, F_x)^t$

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Das Feld  $\vec{G}$  besitzt also ein skalares Potential  $U$ . Es gilt ebenfalls

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y U \\ \partial_x U \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist  $(0, 0, U)^t$  ein Vektorpotential für  $\vec{F}$ . Bei zweidimensionalen Feldern können also zur Konstruktion von Vektorpotentialen die Methoden für skalare Potentiale verwendet werden.

### 3.2.5 Aufgaben

#### Aufgabe 3.2.1:

Welche linearen Felder  $\vec{F} = A\vec{r}$  sind wirbel- und quellenfrei? Bestimmen Sie das Potential und das Vektorpotential.

#### Aufgabe 3.2.2:

Bestimmen Sie zu dem Magnetfeld  $\vec{H}(x, y, z) = (x, 0, -z - 3)^t$  ein zugehöriges Vektorpotential  $\vec{A}$ . Berechnen Sie den Fluß von  $\vec{H}$  durch die Fläche

$$S : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad 0 \leq z \leq 3,$$

sowohl direkt als auch mit Hilfe des Stokes'schen Satzes.

## 3.3 Hauptsatz

### 3.3.1 Poisson-Gleichung im Raum

Eine quadratintegrierbare Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta U = q$$

besitzt die Integraldarstellung

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{s})}{|\vec{s} - \vec{r}|} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß  $|q(\vec{r})|$  für  $r \rightarrow \infty$  genügend schnell abfällt, um die Konvergenz des Integrals zu gewährleisten. Hinreichend ist beispielsweise, dass

$$|q(\vec{r})| \leq \frac{c}{1 + |\vec{r}|^2}.$$

### 3.3.2 Hauptsatz der Vektoranalysis

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  mit

$$|\vec{F}(\vec{r})| = O(1/r^2), \quad r \rightarrow \infty,$$

läßt sich in einen wirbel- und einen quellenfreien Anteil zerlegen:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{H} : \operatorname{rot} \vec{G} = \vec{0}, \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Dabei ist

$$\vec{G} = \operatorname{grad} U, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

und die Potentiale lassen sich durch Lösen der Poissongleichungen

$$\Delta U = \operatorname{div} \vec{F}, \quad -\Delta A = \operatorname{rot} \vec{F}$$

bestimmen.

### Beweis:

Man definiert zunächst das Skalarpotential  $U$  durch Lösen der Poissongleichung  $\Delta U = \operatorname{div} \vec{F}$  und setzt  $\vec{G} = \operatorname{grad} U$ . Dann ist

$$\operatorname{div}(\vec{F} - \vec{G}) = 0.$$

Für  $\vec{H} = \vec{F} - \vec{G}$  existiert also ein Vektorpotential  $\vec{A}$ , wobei nach Addition eines geeigneten Gradientenfeldes  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  angenommen werden kann. Somit gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A},$$

das Vektorpotential erfüllt also ebenfalls eine Poissongleichung.

### Beispiel:

Zerlegt man für ein lineares Feld

$$\vec{F} = A\vec{r}, \quad A = (a_{j,k})$$

die Matrix  $A$  in der Form

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_S + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_B,$$

so ist

$$U = \frac{1}{2} \vec{r}^t S \vec{r}$$

ein skalares Potential für den symmetrischen Anteil:

$$S\vec{r} = \operatorname{grad} U.$$

Die Multiplikation mit der schiefsymmetrischen Matrix  $B$  kann man in der Form

$$B\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{r} = \vec{b} \times \vec{r}$$

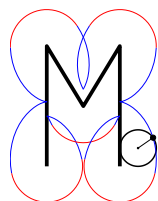
schreiben. Also ist

$$\vec{G} = (\vec{b} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

ein Vektorpotential für  $B\vec{r}$ . Insgesamt folgt

$$A\vec{r} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \vec{G}.$$





<http://www.mathematik-online.org/>