

Strömungslehre 3

- Kompressible Strömungen
- Grundgleichungen für Newtonsche Fluide
- Numerische Strömungsberechnung
- Aufgaben
- Anhang

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Kompressible Strömungen
 - Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases
 - Grundgleichungen
 - Rohrströmung
 - Ausströmvorgänge
- Grundgleichungen für Newtonsche Fluide
 - Lokale Massenbilanz
 - Lokale Impulsbilanz
 - Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten
 - Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen
 - Eindimensionale Beispiele
 - Laminare Gerinneströmung
 - Wirbelgleichung
- Numerische Strömungsberechnung
 - Diskretisierung
 - Modellierung der Turbulenz
 - Das Simulationsprogramm Femlab
 - Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung
 - Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
- Anhang
 - Literatur
 - Nachweise
 - Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

Kompressible Strömungen

- Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases
- Grundgleichungen
- Rohrströmung
- Ausströmvorgänge

Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases

- Zustandsgleichungen:
 - thermisch
 - $p = R_i \rho T$
 - kalorisch
 - $du = c_V dT$
 - c_V von T unabhängig (perfektes Gas) →
 - $u = c_V T$ (bei geeignetem Nullpunkt für u)

- Isentrope Zustandsänderung:
 - keine Wärmeübertragung
 - Isentropengleichungen

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$$

- $\frac{p^{\kappa-1}}{T^\kappa} = \text{const}$

- Adiabatenkoeffizient
 - $\kappa := c_p/c_V$
- außerdem beim idealen Gas
 - $c_p - c_V = R_i$
 - $\Rightarrow c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i$

- Enthalpie:
 - definiert als
 - $H := U + p V$
 - spezifische Enthalpie mit Gasgleichung

$$h = u + p/\rho$$
$$= u + R_i T$$

- für perfektes Gas

$$h = c_V T + (c_p - c_V) T$$
$$= c_p T$$

- Schallgeschwindigkeit a :
 - Schall: schnelle Druckänderung, adiabatisch
 - Schallgeschwindigkeit allgemein gegeben durch

- $a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$

- Isentropengleichung beim idealen Gas →

- $a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R_i T}$

○ Machzahl

- $\text{Ma} := w / a$

Grundgleichungen

- Kontinuitätsgleichung:
 - Masse-Zustrom in Zeit dt durch Stromröhre des Querschnitts A_1
 - $dm_1 = \rho_1 * A_1 * w_1 dt$
 - Abstrom am anderen Ende, Querschnitt A_2
 - $dm_2 = \rho_2 * A_2 * w_2 dt$
 - stationär \rightarrow
 - $dm_1 = dm_2$
 - $\Rightarrow A_1 * \rho_1 * w_1 = A_2 * \rho_2 * w_2$
- Energiegleichung:
 - keine explizite Energiezufuhr
 - Berücksichtigung der Reibung als innere Energie \rightarrow
 - $gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}w^2 + u = \text{const.}$
 - beim idealen Gas
 - $\frac{p}{\rho} = R_i T = (c_p - c_v)T$
 - beim perfekten Gas wegen $u = c_v T$ daher
 - $gz + c_p T + w^2/2 = \text{const.}$
 - oder mit der Enthalpie
 - $gz + h + w^2/2 = \text{const.}$

Rohrströmung

- Druckabfall am Rohr:

- mit Rohrreibungszahl λ

- $dp = -\lambda \frac{dl}{2d} \rho \bar{w}^2$

- Gasgleichung

- $\frac{\rho T}{p} = \text{const.}$

- $\Rightarrow \rho = \rho_1 \cdot \frac{p}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T}$

- Kontinuitätsgleichung + konstanter Rohrquerschnitt \rightarrow

- $\bar{w} \rho = \text{const.}$

- $\Rightarrow \bar{w} = \bar{w}_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho}$
 - $= \bar{w}_1 \cdot \frac{p_1}{p} \cdot \frac{T}{T_1}$

- damit Druckabfall

- $dp = -\lambda \frac{\rho_1 p_1 \bar{w}_1^2 T}{2dT_1 p} dl$

- Druckabfall bei isothermer Strömung:

- langsame Strömung durch nichtisolierte Rohrleitung \rightarrow

- $T = \text{const}$

- z.B. Ferngasleitung

- ρ ändert sich \rightarrow

- \bar{w} ändert sich

- v ändert sich

- Re ändert sich

- λ ändert sich

- Gleichung für Druckabfall nur numerisch lösbar

- Integration einfach für Näherung: $\lambda = \text{const} \rightarrow$

- $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1 = -2\lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2dp_1} l$

- Druckabfall bei adiabatischer Strömung:

- thermisch isoliertes Rohr \rightarrow

- $T = T_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$

- z.B. Fernwärmeleitung (Dampf)

- Integration für $\lambda = \text{const} \rightarrow$

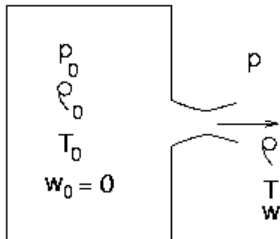
- $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa+1)/\kappa} - 1 = -\frac{\kappa+1}{\kappa} \lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2dp_1} l$

- Aufgaben:

- Aufgabe 1

Ausströmvorgänge

- Ausströmen aus einem Kessel:
 - adiabates Ausströmen von perfektem Gas



- Anfangsgeschwindigkeit $w_0 = 0$
- Ausgangsdruck p gegeben
- Dichte und Temperatur mit Adiabatengleichung

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

- Geschwindigkeit nach dem Energiesatz

$$c_p T + \frac{1}{2} w^2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$

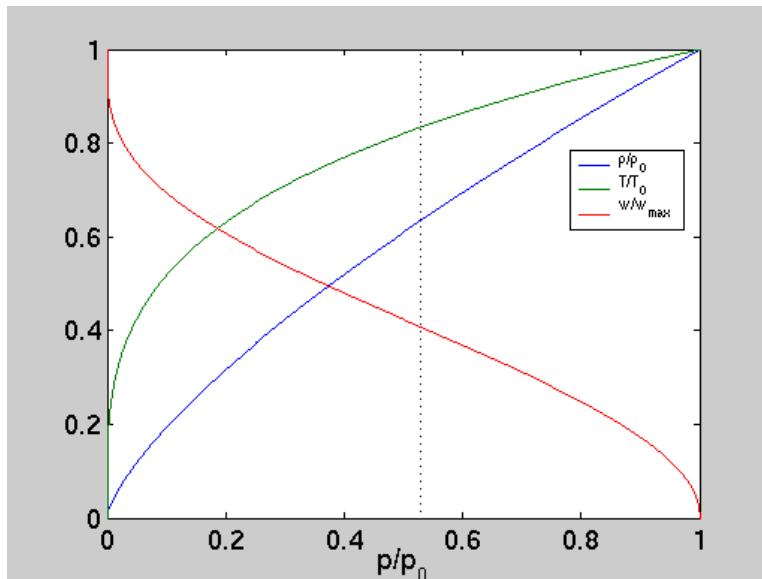
- Maximalgeschwindigkeit

$$w_{max} = \sqrt{2c_p T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{w}{w_{max}} = \sqrt{1 - \frac{T}{T_0}}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}}$$

- graphisch für Luft ($\kappa = 1.4$)

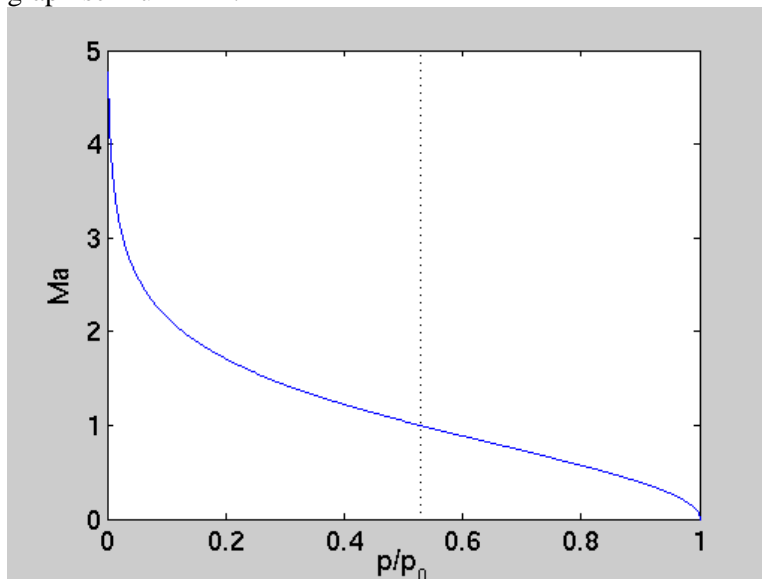


- Machzahl:

- in Abhängigkeit von p

$$\begin{aligned}
 \text{Ma} &= \frac{w}{a} = \frac{w}{w_{max}} \cdot \frac{w_{max}}{a} \\
 &= \frac{w}{w_{max}} \cdot \frac{\sqrt{2c_p T_0}}{\sqrt{\kappa R_i T}} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{T}{T_0}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \frac{T_0}{T}} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T} - 1} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1}
 \end{aligned}$$

- graphisch für $\kappa = 1.4$



- Strömung "näherungsweise inkompressibel" für

- $\text{Ma} < 0.3$

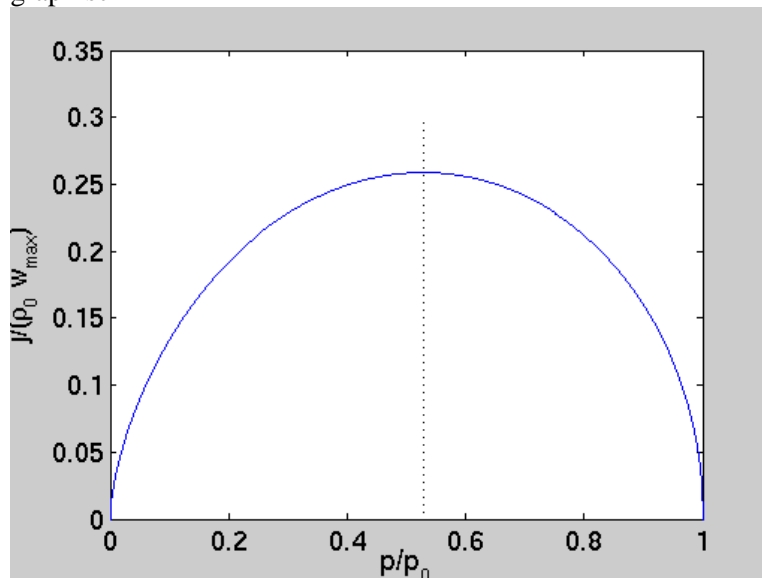
- $\rightarrow p/p_0 > 0.93$
- $\rightarrow \rho/\rho_0 > 0.95$
- Dichteänderung kleiner 5%
- kritischer Druck p^* bei $Ma = 1 \rightarrow$
 - $\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\kappa/(\kappa-1)}$
- Werte der anderen Größen beim kritischen Druck sofort durch Einsetzen
- bei Luft

p^*/p_0	0.528
ρ^*/ρ_0	0.634
T^*/T_0	0.833
w^*/w_{max}	0.408

- Massenstromdichte j :
 - Masse pro Zeit und Querschnittsfläche
 - gegeben durch
 - $j = \rho w$
 - Abhängigkeit vom Druck

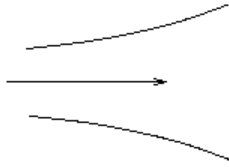
- $\frac{j}{\rho_0 w_{max}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}}$

- graphisch

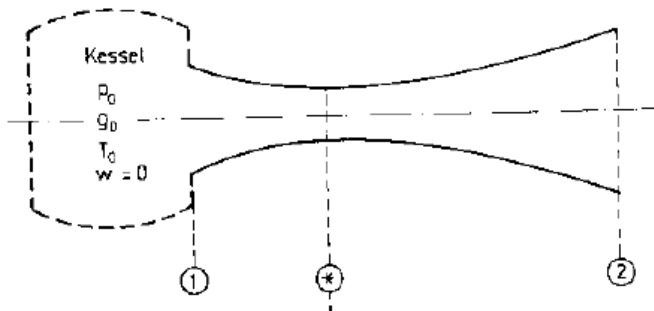


- Maximum bei p^*/p_0 , also $Ma = 1$
- für Luft
 - $j^*/(\rho_0 w_{max}) = 0.259$
- Strömung bei veränderlichem Querschnitt:
 - Kontinuitätsgleichung \rightarrow

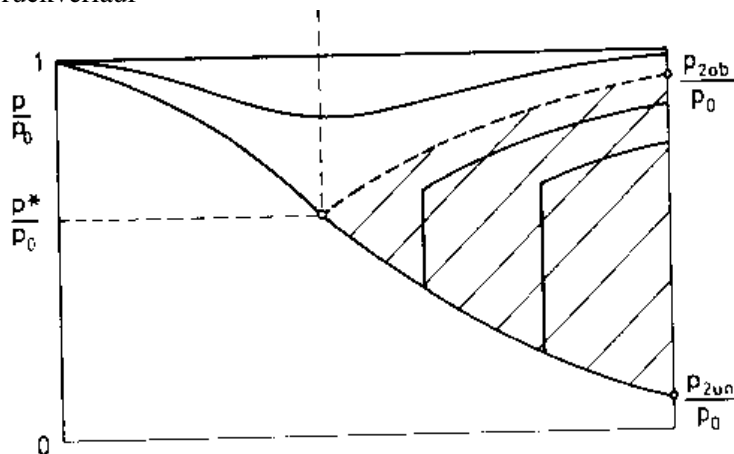
- $j A = \text{const.}$
- Querschnitt wächst \rightarrow Stromdichte sinkt und umgekehrt
- wegen Maximum von $j(p)$ verschiedenes Verhalten für $Ma > 1$ bzw. $Ma < 1$
- z.B. bei wachsendem Querschnitt



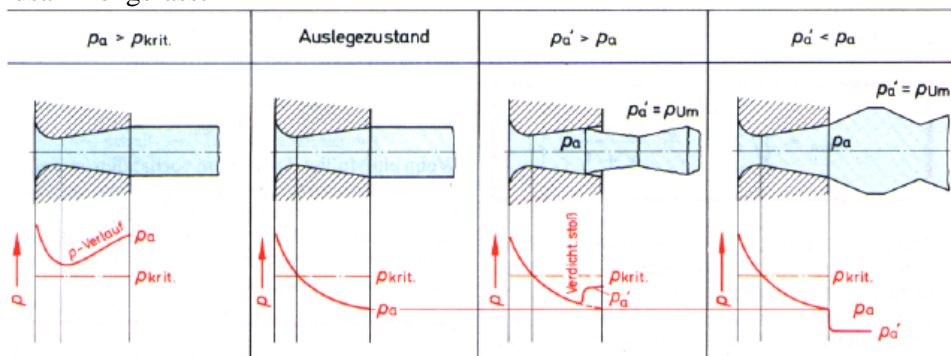
- Unterschallströmung ($Ma < 1$)
 - Stromdichte sinkt
 - \rightarrow Druck steigt
 - \rightarrow Dichte und Temperatur steigen
 - \rightarrow Geschwindigkeit sinkt
- Überschallströmung ($Ma > 1$)
 - Stromdichte sinkt
 - \rightarrow Druck sinkt
 - \rightarrow Dichte und Temperatur sinken
 - \rightarrow Geschwindigkeit steigt
- Lavaldüse:
 - zur Erzeugung einer Überschallströmung, etwa in Dampfturbinen oder Strahltriebwerken



- Funktionsweise
 - erst Verengung \rightarrow Geschwindigkeit steigt
 - dünnste Stelle: $w = a$ ($Ma = 1$)
 - Verbreiterung $\rightarrow w$ steigt weiter
- Druckverlauf



- Außendruck $p_2 < p_{2,ob}$
 - → reine Unterschallströmung (Venturirohr)
- Außendruck $p_2 = p_{2,un}$
 - → kritischer Druck an engster Stelle (*)
 - → Überschallströmung entsteht
- Außendruck $p_2 < p_{2,un}$
 - Druck bei (*) auch nur p^*
 - Stromdichte bleibt konstant (sinkt nicht ab)
 - Nachexpansion am Düsenende
- Zwischenbereich $p_{2,ob} > p_2 > p_{2,un}$
 - Verdichtungsstoß, nicht adiabatisch
- zusammengefasst



- Aufgaben:
 - Aufgabe 2

Grundgleichungen für Newtonsche Fluide

- Bewegungsgleichungen für Fluide:
 - Grundgesetze der Bewegung (wie $F = ma$)
 - partielle Differentialgleichungen
 - Herleitung aus Bilanzen für kleines (differentielles) Kontrollvolumen
- Einschränkungen im folgenden:
 - Newtonsches Reibungsgesetz
 - inkompressibel
 - stationär
 - zweidimensional

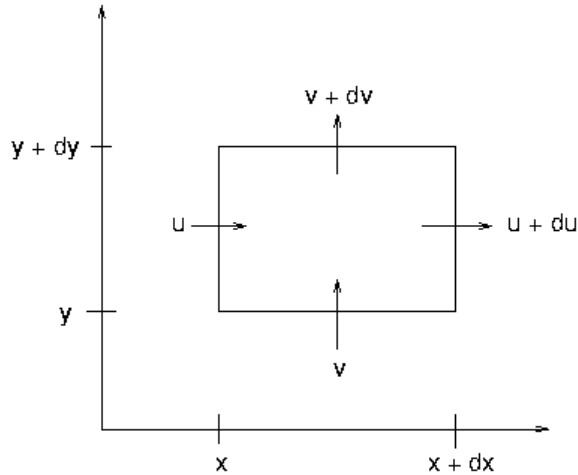
- $$\vec{w}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

- Lokale Massenbilanz
- Lokale Impulsbilanz
- Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten
- Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Lokale Massenbilanz

- Kontrollvolumen:

- Längen dx , dy und b (feste Höhe)



- kleine Geschwindigkeitsänderungen

- $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$

- $dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$

- Gesamtmasse im Kontrollvolumen:

- ändert sich durch Ein- und Ausströmen der Fluidteilchen

- $d\dot{m} = \rho \vec{w} d\vec{A}$

- Skalarprodukt: Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Fläche zählt

- Vorzeichen: Einströmen negativ, Ausströmen positiv

- Bilanz für das Kontrollvolumen

- $$\begin{aligned} d\dot{m} &= -\rho u b dy + \rho(u + du) b dy - \rho v b dx + \rho(v + dv) b dx \\ &= \rho(du dy + dv dx) b \\ &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) b dx dy \end{aligned}$$

- Inkompressible Strömung:

- Masse im Kontrollvolumen konstant $\rightarrow d\dot{m} = 0$

- damit Kontinuitätsgleichung

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{KG})$

Lokale Impulsbilanz

- Gesamtimpuls im Kontrollvolumen:
 - ändert sich durch Ein- und Ausströmen der Fluidteilchen

$$d\vec{p} = d\vec{m}\vec{w}$$

- $= \rho(\vec{w} \cdot d\vec{A})\vec{w}$

- in Komponenten

$$d\dot{p}_x = \rho u(\vec{w} \cdot d\vec{A})$$

- $d\dot{p}_y = \rho v(\vec{w} \cdot d\vec{A})$

- auftretende Kräfte

- Volumenkraft F_K

- Druckkraft F_p

- Reibungskraft F_R

- Impulsänderung = Summe der angreifenden Kräfte

- $d\vec{p} = d\vec{F}_K + d\vec{F}_p + d\vec{F}_R$

- Impulsänderung:

- x-Komponente

$$d\dot{p}_x = \rho u(-ubdy)$$

$$+ \rho u(-vbdx)$$

$$+ \rho(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)bdy$$

$$+ \rho(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy)(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)bdx$$

-

- Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung

$$d\dot{p}_x = \rho \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) bdx dy$$

$$= \rho bdx dy \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)$$

$$= \rho bdx dy \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

-

- wegen der Kontinuitätsgleichung

- analog y-Komponente

- $d\dot{p}_y = \rho bdx dy \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

- Volumenkraft F_K :

- proportional zum Volumen

- beim Kontrollvolumen

- $d\vec{F}_K = \vec{k} dx dy b$

- z.B. für Schwerkraft (unten = -y-Richtung)

- $k_x = 0$

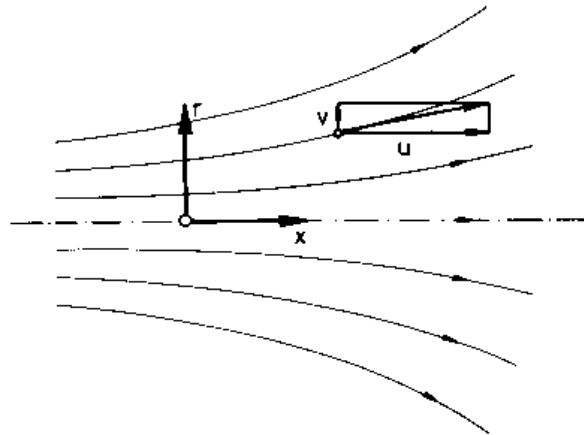
- $k_y = -\rho g$

- Druckkraft F_p :

- bei kleiner Fläche $d\vec{A}$
 - $d\vec{F}_p = p d\vec{A}$
- x-Komponente beim Kontrollvolumen
 - $$dF_{p,x} = p b dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) b dy$$
 - $$= -\frac{\partial p}{\partial x} b dx dy$$
- analog y-Komponente
 - $$dF_{p,y} = -\frac{\partial p}{\partial y} b dx dy$$
- Reibungskraft F_R :
 - betrachten reine Schichtströmung $u = u(y), v = 0$
 - damit x-Komponente von F_R
 - $$dF_{R,x} = (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}) b dx - \tau b dx$$
 - $$= \frac{\partial \tau}{\partial y} b dx dy$$
 - für Newtonsches Fluid somit
 - $$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$
 - $$\Rightarrow dF_{R,x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b dx dy$$
 - bei beliebiger Strömung zusätzlich Normalspannungen
 - dafür erhält man (mit einiger Mühe)
 - $$dF_{R,x} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) b dx dy$$
 - $$dF_{R,y} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) b dx dy$$
- Navier-Stokes-Gleichungen:
 - ergeben sich sofort beim Zusammensetzen aller Teile
 - $$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS1})$$
 - $$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS2})$$
 - zusammen mit Kontinuitätsgleichung 3 Gleichungen für u, v, p
 - wesentlich: Randbedingungen (z.B. Haftbedingung an Wänden)
 - nichtlinear \rightarrow analytisch (meistens) nicht lösbar
 - numerische Lösung z.T. sehr aufwändig

Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten

- Rotationssymmetrische Strömung:
 - z.B. für Rohre
 - Koordinaten
 - x längs des Rohrs
 - r senkrecht zum Rohr
 - ϕ Drehung längs Rohrumfang



- Komponenten der Geschwindigkeit
 - u in x-Richtung
 - v in r-Richtung
 - keine Bewegung in ϕ -Richtung
- Rotationssymmetrie \rightarrow alle Größen unabhängig von ϕ
- Gleichungen für u, v, p:
 - dreidimensionale Gleichungen in Zylinderkoordinaten umrechnen
 - Unabhängigkeit von ϕ ausnutzen
 - Ergebnis

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = k_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)$$

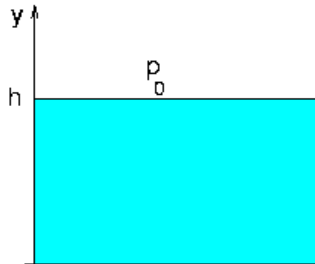
Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

- Eindimensionale Beispiele
- Laminare Gerinneströmung
- Wirbelgleichung

Eindimensionale Beispiele

- Ruhende Flüssigkeit im Schwerfeld:

- Geometrie



- keine Strömung $\rightarrow u = v = 0$

- Schwerkraft

- $k_y = -\rho g$

- Gleichung NS1 \rightarrow

- $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow p = p(y)$

- Gleichung NS2 \rightarrow

- $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

- Integrieren \rightarrow

- $p(y) = -\rho g y + C$

- Randbedingung $p(h) = p_0 \rightarrow$

- $p(y) = p_0 + \rho g (h - y)$

- hydrostatischer Druck

- Reibungsloser Stromfaden:

- keine Reibung $\rightarrow \eta = 0$

- keine Volumenkräfte $\rightarrow k = 0$

- Stromröhre in x-Richtung $\rightarrow u = u(x)$

- damit wird Gleichung NS1

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

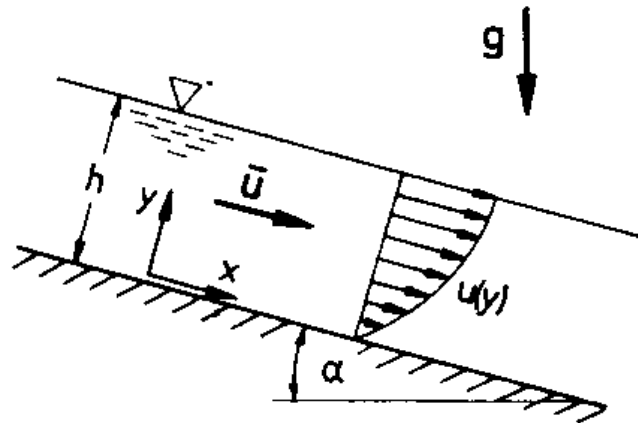
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) = 0$$

- $\Rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{const.}$

- Bernoulli-Gleichung

Laminare Gerinneströmung

- Strömung im Kanal:
 - Neigungswinkel α
 - konstante Wassertiefe h
 - Breite $b \gg h \rightarrow$ Seitenwände vernachlässigbar
 - Koordinaten
 - x längs des Gefälles
 - y senkrecht zum Gefälle



- Schwerkraft
 - $k_x = \rho g \sin \alpha$
 - $k_y = -\rho g \cos \alpha$
- Höhenprofil der Geschwindigkeit:
 - keine Variation in der Breite
 - unabhängig von x (ausgebildete Strömung)
 - \rightarrow Ableitungen nach x verschwinden
 - \rightarrow partielle Ableitung nach $y =$ gewöhnliche Ableitung
 - Kontinuitätsgleichung \rightarrow
 - $dv/dy = 0$
 - $\rightarrow v = \text{const.}$
 - $v = 0$ am Boden
 - $\rightarrow v = 0$ überall
 - wegen $v = 0$ wird NS2
 - $dp/dy = -\rho g \cos \alpha$
 - Lösung (wie beim hydrostatischen Druck)
 - $p = p_0 + \rho g (h - y) \cos \alpha$
 - aus NS1 wird
 - $$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{k_x}{\eta} = -\frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha =: -B$$
 - Integration \rightarrow
 - $du/dy = -B y + C_1$
 - Randbedingung:
 - keine Reibung an der Oberfläche (Luftreibung und Oberflächenwellen vernachlässigt)

- $\rightarrow \tau(y=h) = 0$
 - $\rightarrow du/dy(y=h) = 0$
 - $\rightarrow du/dy = B (h - y)$
 - nochmals integrieren und Haftbedingung $u(0) = 0 \rightarrow$
 - $u = B y (h - y/2)$
 - Geschwindigkeit an der Oberfläche maximal
 - $u_{\max} = u(h) = h^2 B/2$
- Reibungszahl λ :
 - aus Gleichgewicht zwischen Druckabfall und Reibungsverlust an der Wand folgte
 - $$\tau_W = \frac{\lambda \bar{w}^2 \rho}{8}$$
 - $$\Rightarrow \lambda = \frac{8\tau_W}{\rho \bar{w}^2}$$
 - Schubspannung am Boden
 - $$\tau_W = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \eta B h$$
 - mittlere Geschwindigkeit
 - $$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{3} B h^2$$
 - damit
 - $$\lambda = \frac{72 \eta}{\rho B h^3}$$
- λ als Funktion von Re:
 - Reynoldszahl bei offener Strömung war
 - $$Re = \frac{\rho \bar{u} d_h}{\eta}$$
 - dazu hydraulischer Durchmesser
 - $$d_h = \frac{4A}{U} = \frac{4bh}{2h + b}$$
 - $$\approx 4h \quad (b \gg h)$$
 - damit
 - $$Re = \frac{4\rho B h^3}{3\eta}$$
 - somit
 - $$\lambda = \frac{96}{Re}$$
 - ähnlich zum Hagen-Poiseuille-Gesetz der Rohrströmung
- Aufgaben:
 - Aufgabe 3

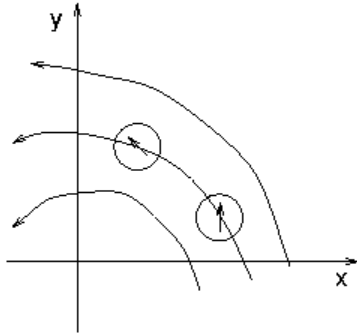
Wirbelgleichung

- Drehung ω :

- Definition

- $$\omega := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- anschaulich: Drehgeschwindigkeit eines kleinen Teilchens in der Strömung



- z.B. bei starrer Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{w} = \omega_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- $$\Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \omega_0 (1 - (-1)) = \omega_0$$

- genauere Herleitung aus Zerlegung der Strömung in kleinen Verzerrungs- und Drehanteil (s. Anhang)

- Eulersche Bewegungsgleichungen:

- reibungslose Strömung ($\eta = 0$)
- keine Volumenkräfte ($k_x = k_y = 0$)
- damit aus NS1 und NS2

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{EU1})$$

- $$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{EU2})$$

- Wirbeltransportgleichung:

- Druck aus den Euler-Gleichungen eliminieren
 - EU1 nach y ableiten, EU2 nach x ableiten,
 - beides subtrahieren \rightarrow

- $$\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

- Klammern = 0 wegen Kontinuitätsgleichung
- Definition von ω einsetzen \rightarrow

- $$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

- Helmholtz'scher Wirbelsatz:

- Änderung der Wirbelstärke ω längs einer Stromlinie

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \\
 &= \frac{\partial\omega}{\partial x} u dt + \frac{\partial\omega}{\partial y} v dt
 \end{aligned}$$

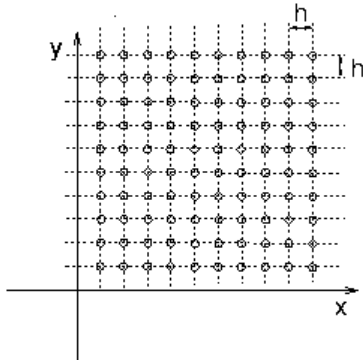
- = 0
- wegen der Wirbeltransportgleichung
- für reibungslose stationäre Strömung folgt
 - Drehung der Fluidteilchen längs ihrer Bahn ist konstant
- Spezialfall
 - homogene Anströmung bleibt wirbelfrei
- Aufgaben:
 - Aufgabe 4

Numerische Strömungsberechnung

- Diskretisierung
- Modellierung der Turbulenz
- Das Simulationsprogramm Femlab
- Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung
- Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel

Diskretisierung

- Grundprinzip zur Lösung der Bewegungsgleichungen:
 - kontinuierlicher Raum $(x,y) \rightarrow$ Gitter (x_i, y_i) (endlich viele Punkte)
 - Differentialgleichung $L(u) = 0 \rightarrow$ algebraische Gleichung $A(u_i) = 0$
 - Lösung liefert Näherungswerte an Gitterpunkten
 - Zwischenwerte durch Interpolation (FDM, FVM) oder Ansatzfunktionen (FEM)
- Finite-Differenzen-Methode (FDM):
 - Raum zerlegt in gleichmäßiges Gitter, kleine Gitterweite h

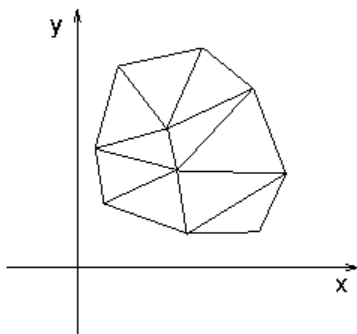


- Ableitungen ersetzt durch Differenzen aus Taylor-Entwicklung, z.B.

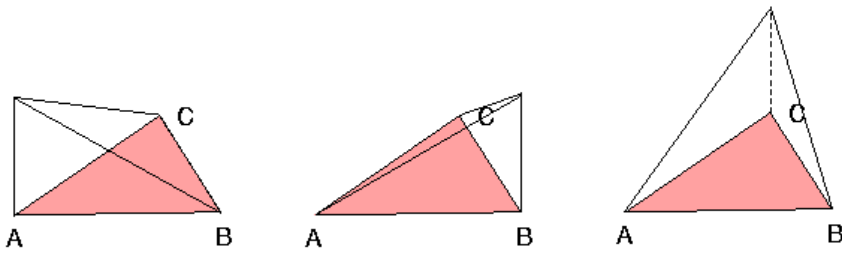
$$u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + O(h^2)$$

- $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$

- algebraische Gleichungen numerisch lösen
- Vorteile von FDM
 - relativ einfache Programmierung
 - mathematisch gut zu analysieren
- Nachteile von FDM
 - schwierig an komplizierte Geometrie anzupassen
 - gleiche Genauigkeit im ganzen Raum
- Finite-Elemente-Methode (FEM):
 - Raum zerlegt in kleine Teilvolumina V_i (Elemente)



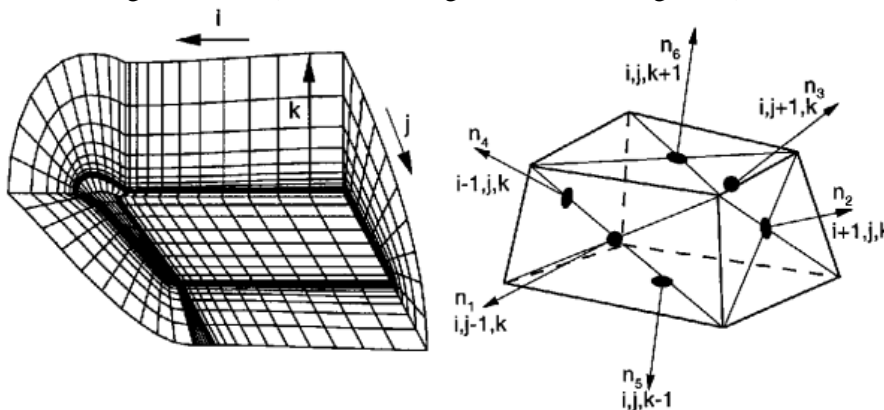
- einfache Basisfunktionen $N_i(x,y)$ in den Elementen (meist linear)



- Ansatz: Lösung ist Linearkombination der Basisfunktionen
 - $u(x, y) = \sum_i c_i N_i(x, y)$
- Einsetzen von u in Differentialgleichung → Fehlerterm R
 - $L(u) = R$
- Koeffizienten c_i finden, so dass R "im Mittel möglichst klein"
 - gewichtete Mittelwerte des Fehlers sollen verschwinden
 - Gewichtsfunktionen = Basisfunktionen N_i
 - $\int R N_k dx dy = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- bei gegebener Differentialgleichung und Basisfunktion
 - R als Funktion der Koeffizienten c_i bekannt
 - Integrale über die (einfachen) N_i bekannt
 - → (riesiges) lineares Gleichungssystem für c_i
 - dafür viele gute numerische Verfahren
- Vorteile von FEM
 - verschiedene Formen für Grundelemente möglich
 - sehr gut anpassbar an beliebige Geometrie
 - Verfeinerung an kritischen Stellen problemlos
- Nachteile von FEM
 - Erhaltungssätze nicht respektiert

- Finite-Volumen-Methode (FVM):

- Raum zerlegt in Zellen (meist viereckig in 2d, sechseckig in 3d)



- Werte definiert in den Mittelpunkten der Zellen
- Ableitungen und Werte an Zellenoberflächen mit Interpolation und Taylor (ähnlich FDM)
- Bilanzgleichungen für Masse und Impuls für jede Zelle → algebraische Gleichungen für die Werte an Zellen-Mittelpunkten
- Zeitabhängigkeit: Integration über die Zeit mit Standard-Verfahren (z.B. Runge-Kutta)

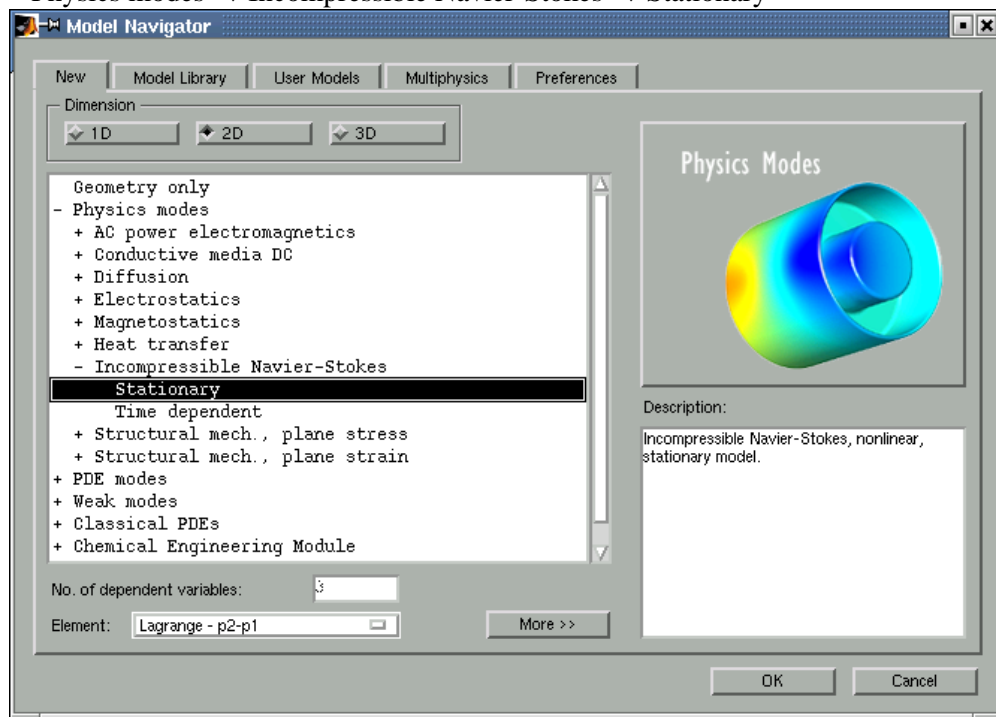
- Vorteile von FVM
 - Erhaltungssätze erfüllt selbst bei geringer Rechengenauigkeit
 - gut anpassbar an beliebige Geometrie
 - Verfeinerung an kritischen Stellen möglich
- Nachteile von FVM
 - nicht ganz so flexible Zellen wie bei FEM
 - mathematisch noch nicht so weit analysiert wie FDM und FEM

Modellierung der Turbulenz

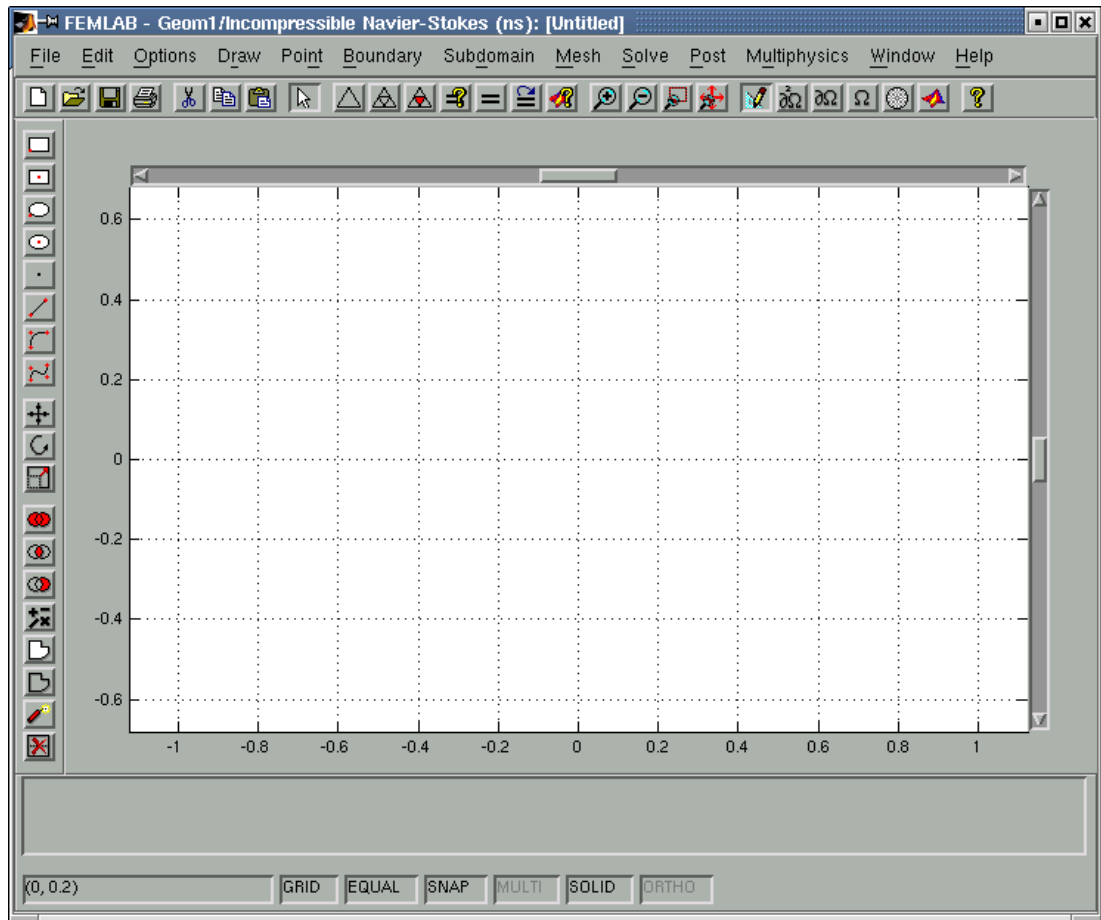
- Grundproblem:
 - viele kleine Wirbel und ggf. Grenzschichten bei turbulenter Strömung
 - beeinflussen mittleres Strömungsfeld
 - sehr hohe Raum- und Zeitauflösung für Numerik nötig →
 - riesiger Speicher- und Rechenbedarf
 - selbst mit heutigen Superrechnern oft nicht machbar
- Lösungsansatz:
 - Aufteilen der Größen in Mittelwerte und kleine Schwankungen (Turbulenzanteil)
 - Mittelwerte beschrieben durch Navier-Stokes-Gleichungen + zusätzliche Turbulenzterme
 - Turbulenz wirkt wie zusätzliche Schubspannung τ_t
 - Turbulenzterme durch empirische Ansätze modellieren
- Turbulente Viskosität η_t :
 - häufige Grundannahme (Boussinesq):
 - η_t ähnlich wie bei Newtonschem Fluid
 - $$\tau_t = \eta_t \frac{\partial u}{\partial y}$$
 - ergibt z.B. zusätzlichen Term in NS1
 - $$\eta_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
 - η_t abhängig von allen Mittelwerten (u, v, p, ρ etc.)
 - Form von η_t aus empirischen Modellen (Turbulenzmodelle)
 - gelten i.a. nur für spezielle Bereiche
 - Konsequenz für die Numerik
 - noch kompliziertere Gleichungen
 - geringere Raum- und Zeitauflösung nötig
 - → mit heutigen Rechnern häufig zufriedenstellende Ergebnisse in akzeptabler Zeit
 - aber: gute Kenntnisse (Gültigkeitsbereiche etc.) beim Anwender unverzichtbar!
- k- ϵ -Modell:
 - beschreibt η_t mit kinetischer Energie k und Dissipationsrate ϵ der Turbulenz
 - k und ϵ selbst beschrieben durch komplizierte Differentialgleichungen mit u, v, p etc.
 - in vielen Anwendungsfällen sehr gute Genauigkeit
 - modifizierte Versionen für spezielle Situationen
- Aufgaben:
 - Aufgabe 5

Das Simulationsprogramm Femlab

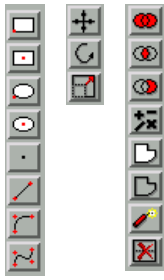
- Eigenschaften:
 - flexibles Programm zur Simulation partieller Differentialgleichungen (PDEs)
 - Hersteller Comsol (deutsche Vertretung)
 - basiert auf Matlab von The MathWorks Inc. (deutsche Vertretung)
 - verwendet FEM zur Lösung
 - viele vordefinierte PDEs für verschiedene Anwendungsbereiche
 - erlaubt Definition eigener PDEs
 - fertige Turbulenzmodelle im Chemical Engineering Module
- Vorgehensweise:
 - Definition der Geometrie (Draw Mode)
 - Festlegen der Randbedingungen (Boundary Mode)
 - Eingabe von Materialkoeffizienten und Anfangsbedingungen (Subdomain Mode)
 - Erzeugen des Gitters (Mesh Mode)
 - Lösen der Gleichungen (Solve Mode)
 - Darstellen der Ergebnisse (Post Mode)
- Starten einer Strömungs-Simulation:
 - Aufruf femlab in Matlab liefert Auswahlfenster
 - Auswahl der Dimension (z.B. 2d)
 - Auswahl der Grundgleichungen (jeweils durch Doppelklick):
Physics modes → Incompressible Navier-Stokes → Stationary



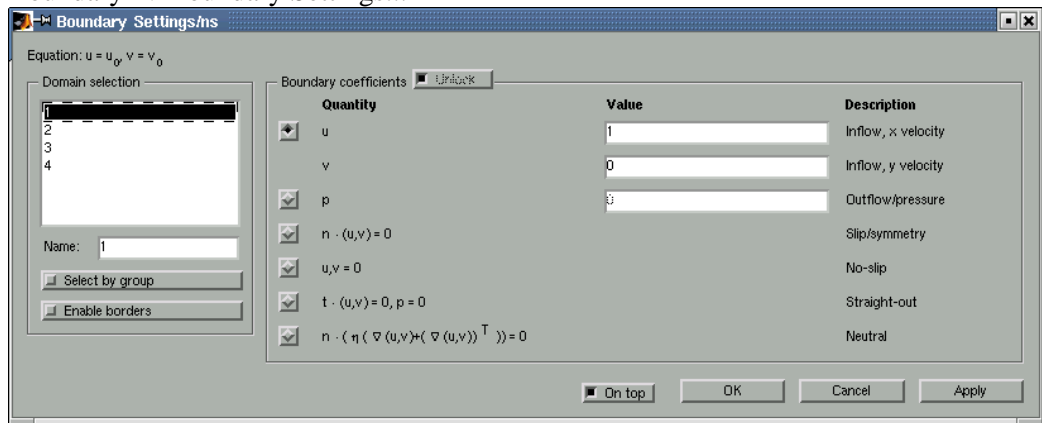
- graphische Oberfläche von Femlab erscheint



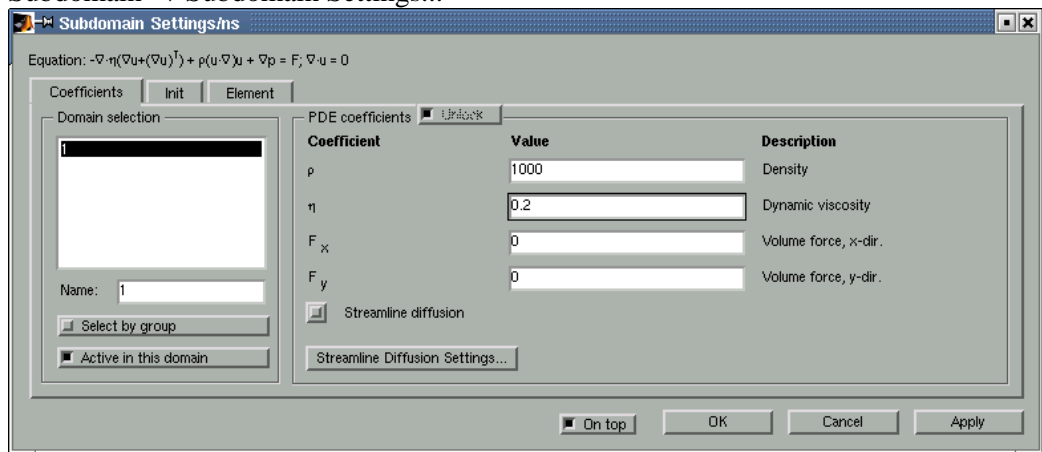
- Grundfunktionen der Oberfläche:
 - Toolbar-Leiste mit wichtigen Funktionen
 - Datei-Funktionen
 -
 - Cut-and-Paste, Auswahl
 -
 - Anzeigebereich (Lupenfunktion)
 -
 - Auswahl des Modes
 -
 - umfangreiche Online-Hilfe
- Definition der Geometrie (Draw Mode):
 - Zeichenobjekte rasten (normalerweise) an Gitterpunkten ein
 - dazu Achsen und Gitter wählen
 - Options → Axis/Grid Settings
 - xmin/xmax/ymin/ymax: dargesteller Bereich
 - X/Y spacing: Abstände der Gitterlinien
 - Extra X/Y: zusätzliche Gitterlinien
 - Werkzeugleiste links





- Einfügen eines Objekts (Rechteck, Kreis, Linie,...)
- Verändern eines Objekts (Verschieben, Drehen, Skalieren)
- Zusammenfassen von Objekten (Vereinigung, Durchschnitt, ...)
- wesentlich umfangreicher und komplizierter für 3d-Modelle
- Festlegen der Randbedingungen (Boundary-Mode):
 - Eingabe unter
 - Boundary → Boundary Settings...

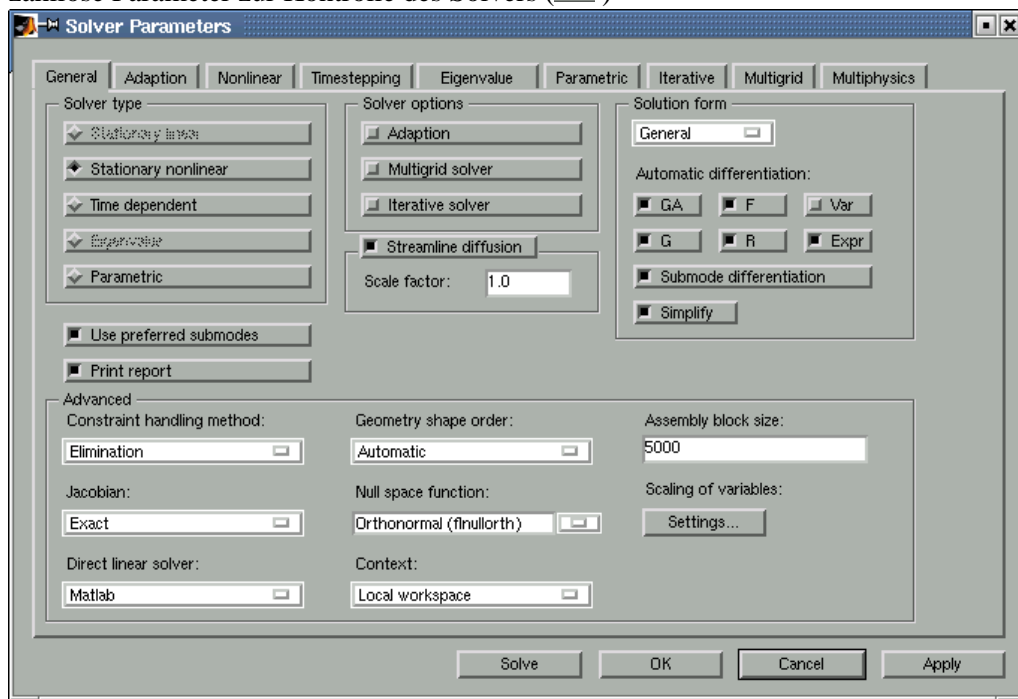




- jeweils für jeden Randabschnitt
- wichtigste Möglichkeiten
 - Werte für u und v (Einlass)
 - Werte für p (Auslass)
 - $u = v = 0$ (Wand)
- Eingabe von Materialkoeffizienten und Anfangsbedingungen (Subdomain-Mode):
 - Eingabe unter
 - Subdomain → Subdomain Settings...

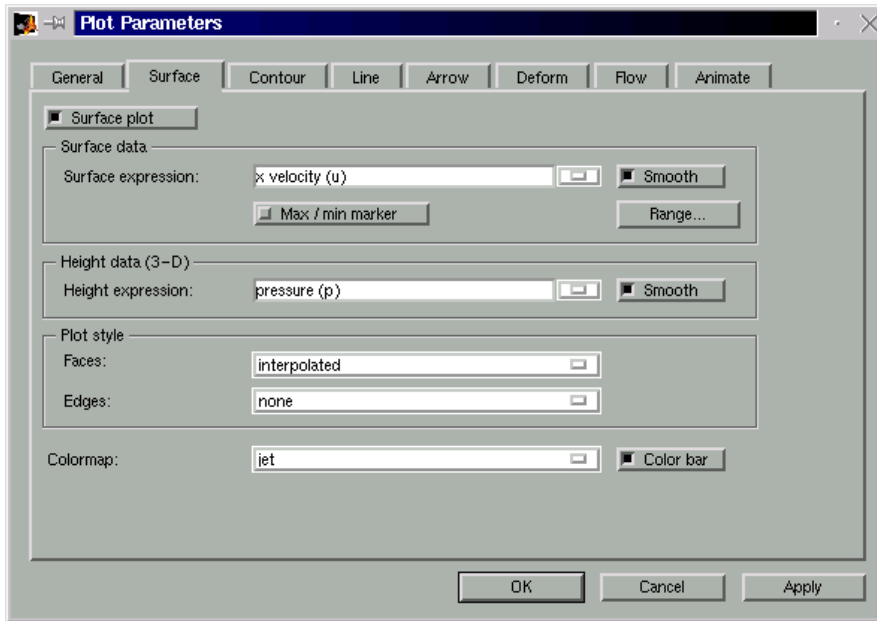


- Werte für

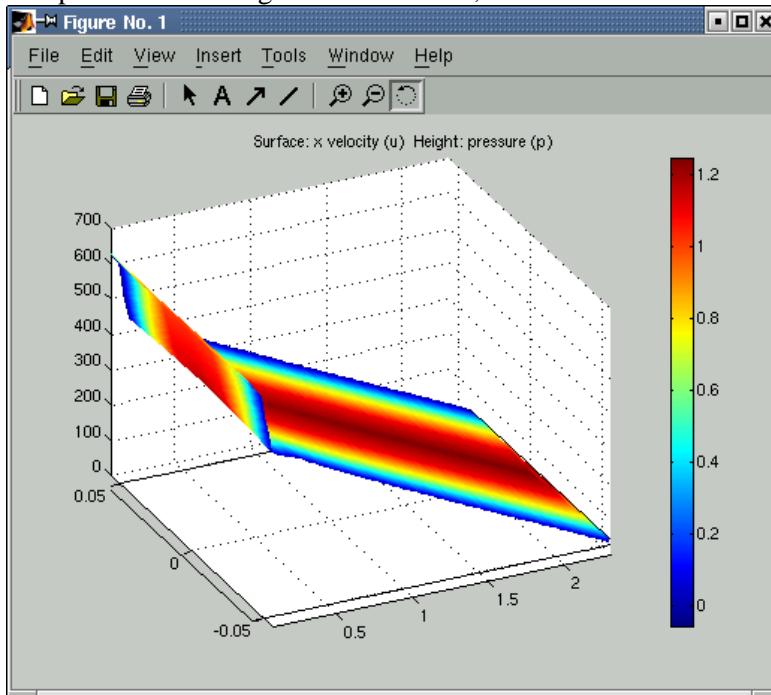
- Druck
- Viskosität
- äußere Kräfte
- auf Blatt "Init" Anfangsbedingungen für zeitabhängige Probleme bzw. Startwerte der Iterationen festlegen
- Erzeugen des Gitters (Mesh-Mode):
 - Toolbar-Funktionen
 - 
 - einfaches Startgitter
 - globale Verfeinerung
 - Verfeinerung von ausgewählten Bereichen
 - Elemente müssen möglichst gleichseitig sein
 - Ausgleichen des Gitters nach lokalen Verfeinerungen
 - Mesh → Jiggle Mesh
- Lösen der Gleichungen (Solve-Mode):
 - zahllose Parameter zur Kontrolle des Solvers ()



- besonders wichtig für Navier-Stokes-Gleichungen
 - "Streamline Diffusion" an
 - "Highly Nonlinear Problem" auf Blatt "Nonlinear" anklicken
- Starten des Solvers ()
- Darstellen der Ergebnisse (Post-Mode):
 - viele verschiedene Darstellungstypen
 - Auswahl der darzustellenden Größen und Darstellungstypen mit Plot-Parametern ()
 - z.B. Surface-Plot

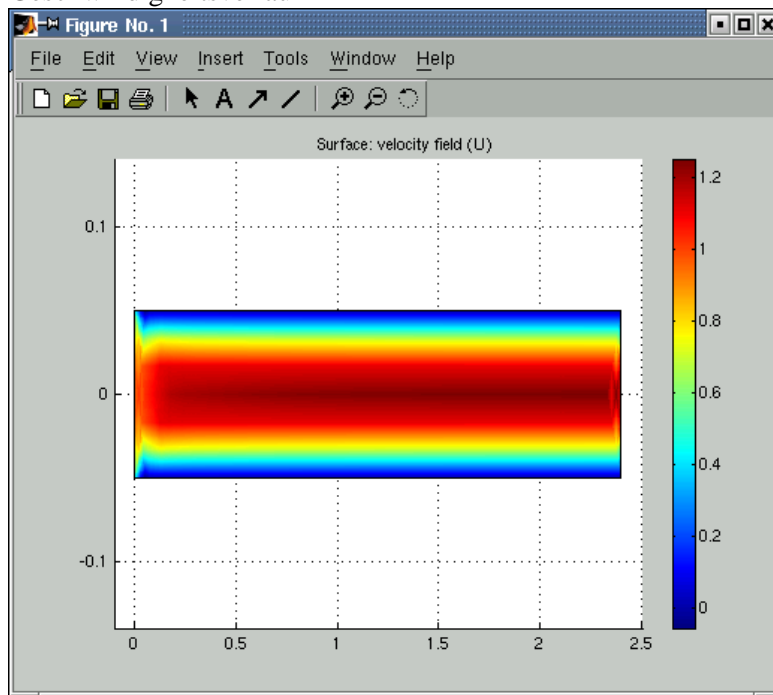


- darzustellende Größe als Farbcode
- ggf. weitere Größe als Höhe
- Beispiel: Geschwindigkeit als Farbcode, Druck als Höhe

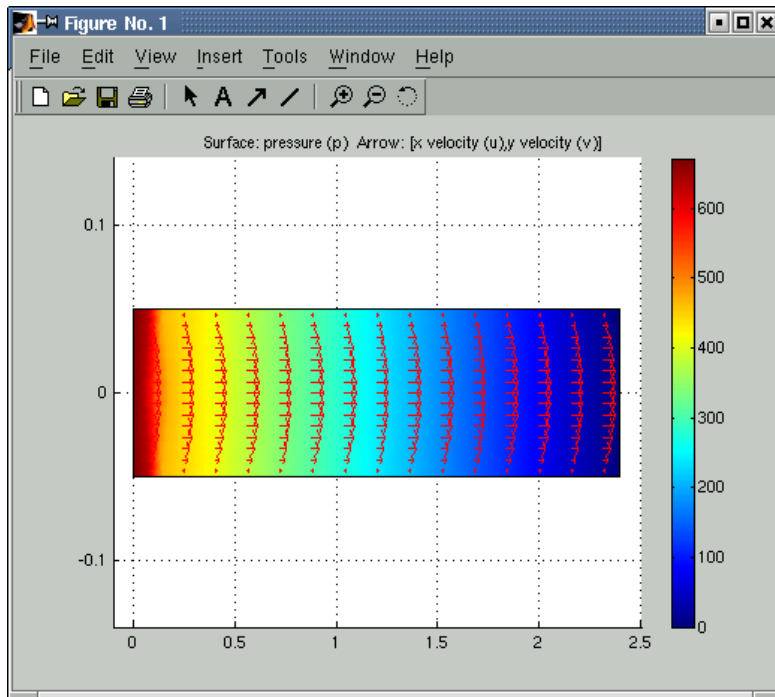


Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung

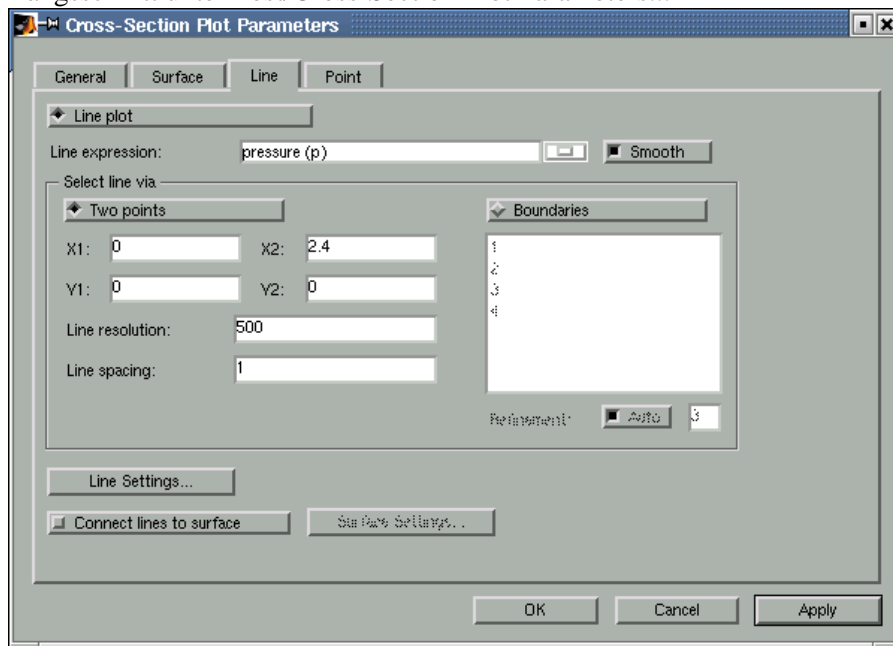
- Modell:
 - Rechteck der Länge 2.4 und der Breite 0.1 ("Rohr")
 - Randbedingungen
 - oben und unten $u = v = 0$ (Wand)
 - links $u = 1, v = 0$ (Einlass)
 - rechts $p = 0$ (Auslass)
 - Materialgrößen (Subdomain-Parameter)
 - $\rho = 1000$
 - $\eta = 100/\text{Re}$ (zunächst $\text{Re} = 500$)
 - keine Volumenkräfte
 - Anfangsbedingungen (Ausgangspunkt für nichtlinearen Solver)
 - $u = 1$
 - $v = 0$
 - $p = 0$
- Laminar, mit geringer Auflösung:
 - verwendet Anfangsgitter (136 Elemente) und $\text{Re} = 500$
 - Geschwindigkeitsverlauf



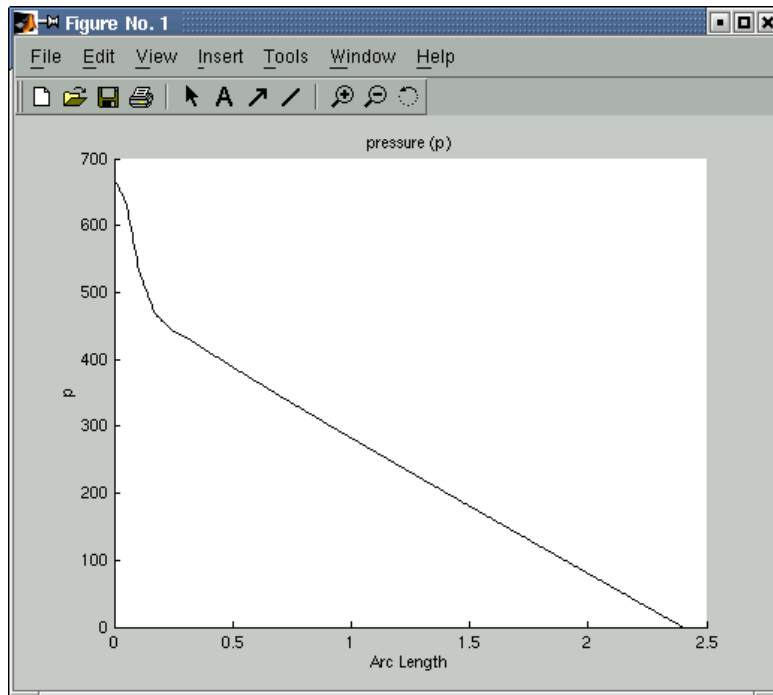
- nach kurzer Einlaufphase konstante Strömung bis kurz vor Auslauf
- Druckverlauf



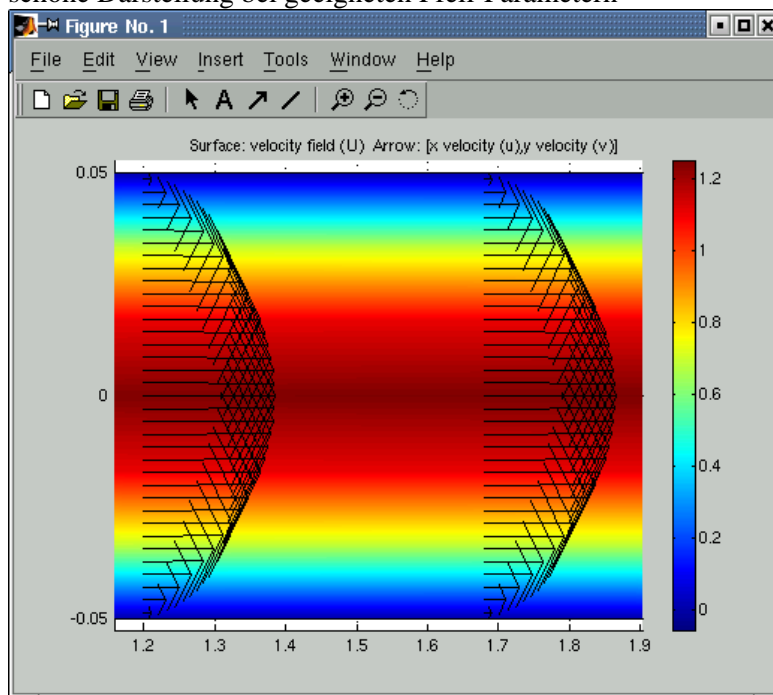
- Längsschnitt unter Post/Cross-Section Plot Parameters...



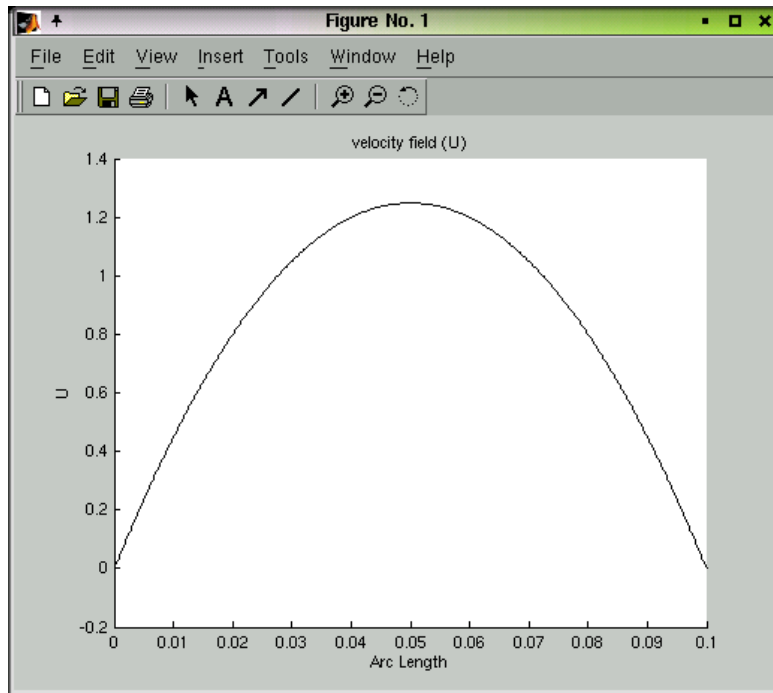
liefert



- nach Einlaufphase bis zum Schluss linear
- Geschwindigkeitsverlauf im Querschnitt
 - schöne Darstellung bei geeigneten Pfeil-Parametern



- oder als Cross-Section Plot



- nahezu parabolisch, obwohl nur ein Gitterpunkt im Innern der Platte liegt!
- Erklärung: quadratische Elemente verwendet
- Bestimmung des Druckverlusts aus Femlab-Daten:
 - Ergebnisse für p im linearen Bereich ablesen
 - dazu Druck als "Surface-Plot" anzeigen lassen und gewünschte Stelle anklicken
 - Ergebnisse:
 - $x_1 = 0.5, p_1 = 389$
 - $x_2 = 2.4, p_2 = 0$
 - $\Rightarrow \frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} = 205$
- Vergleich mit Theorie (Vorsicht: zu naiv!):
 - Ausgangspunkt war $Re = 500$
 - laminar \Rightarrow
 - $\lambda = \frac{64}{Re} = 0.128$
 - mit den Werten für die Simulation und $\bar{w} = 1$ am Eingang
 - $\frac{\Delta p}{l} = \frac{1}{2} \lambda \frac{\bar{w}^2 \rho}{d} = 640$
 - sehr schlechtes Ergebnis!
- Fehler in der Berechnung:
 - Geschwindigkeit am Anfang nicht laminar/parabolisch
 - stattdessen w_{\max} ablesen im parabolischen Bereichen
 - $w_{\max} = 1.25 \Rightarrow \bar{w} = 0.5 w_{\max} = 0.625$
 - damit neue Werte:

$$\text{Re} = \frac{\bar{w}d\rho}{\eta} = 312.5$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = 0.205$$

$$\bullet \frac{\Delta p}{l} = 400$$

○ besser, aber immer noch schlecht!

● Wahre Ursache der Abweichung:

○ Formeln für (kreisrundes) Rohr benutzt, hier aber 2-dim. Rechnung (Platte)

○ analoge Berechnungen wie beim Rohr liefern

$$\bar{w} = \frac{2}{3}w_{max}$$

$$\bullet \lambda = \frac{24}{\text{Re}}$$

○ damit folgt aus $w_{max} = 1.25$

$$\bar{w} = 0.833$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{w}d\rho}{\eta} = 416.7$$

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}} = 0.0576$$

$$\bullet \frac{\Delta p}{l} = \frac{1}{2}\lambda \frac{\bar{w}^2 \rho}{d} = 200$$

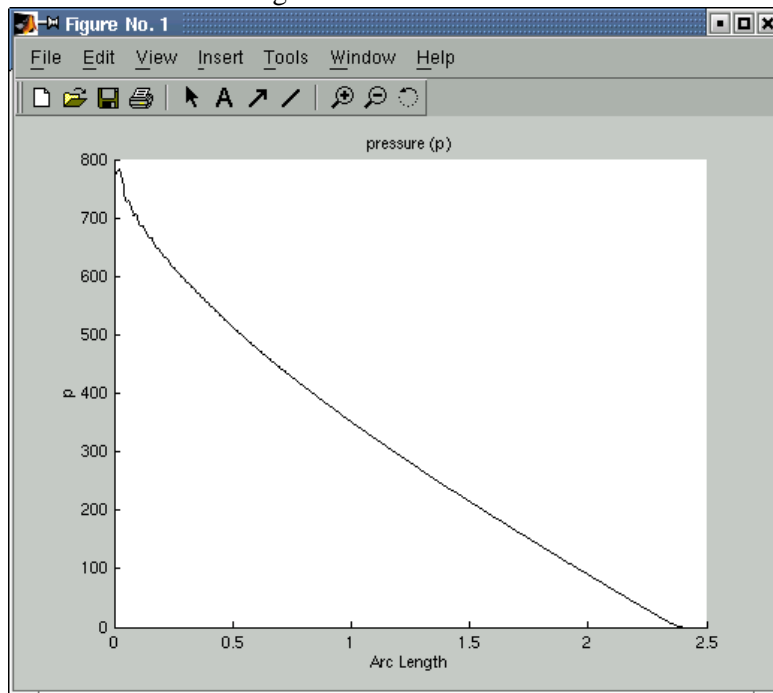
○ gute Übereinstimmung mit Femlab-Rechnung

● Laminar, mit höherer Auflösung:

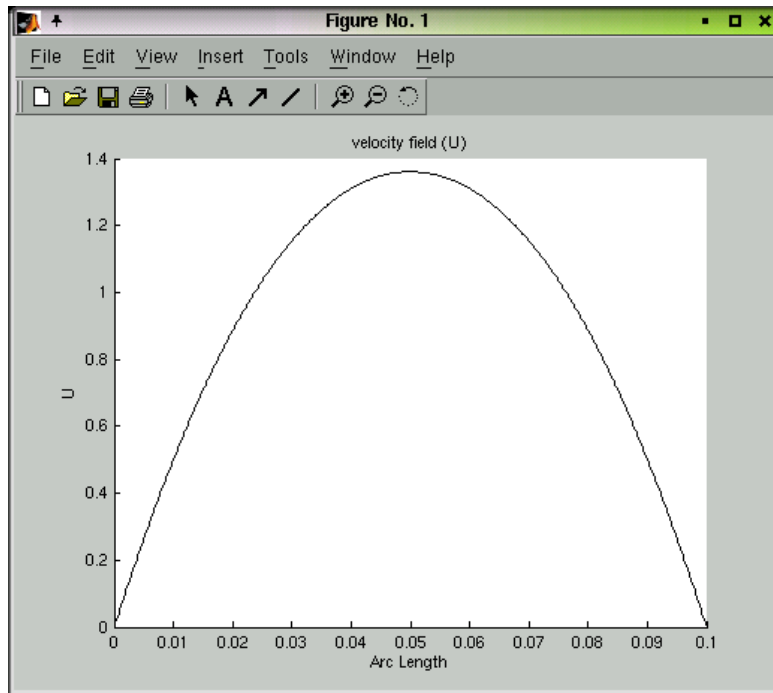
○ Gitter zweimal verfeinern (2176 Elemente, 7 Punkte im Innern)

○ Rechenzeit nun 3 Minuten (Zeiten auf PentiumIII/800MHz, 256MB)

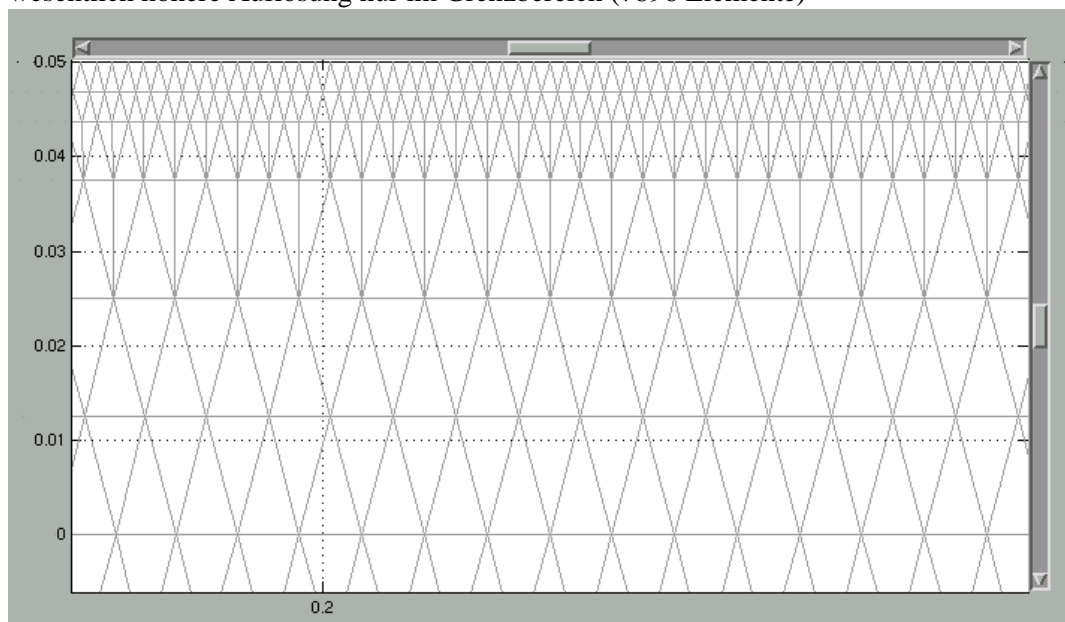
○ Druckverlauf noch länger linear



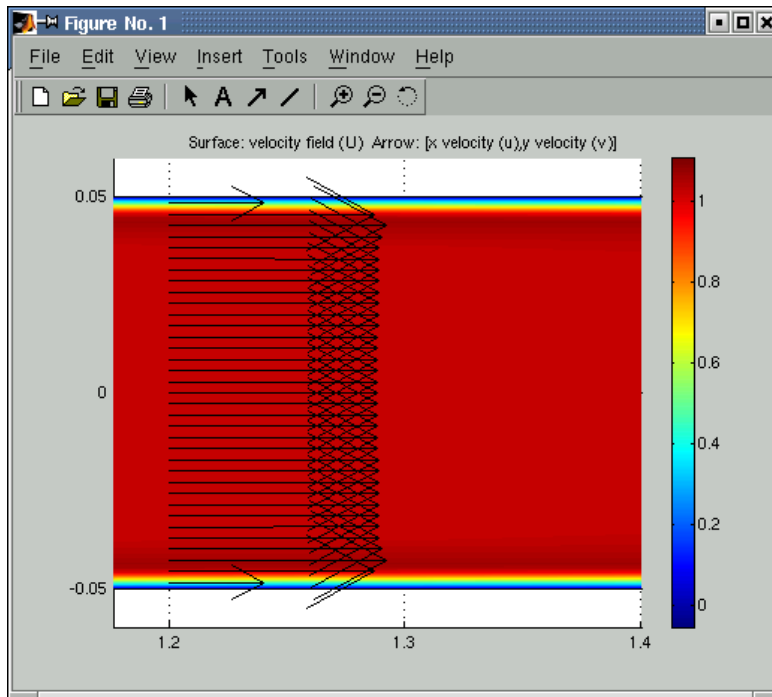
○ Geschwindigkeit im Querschnitt parabolisch



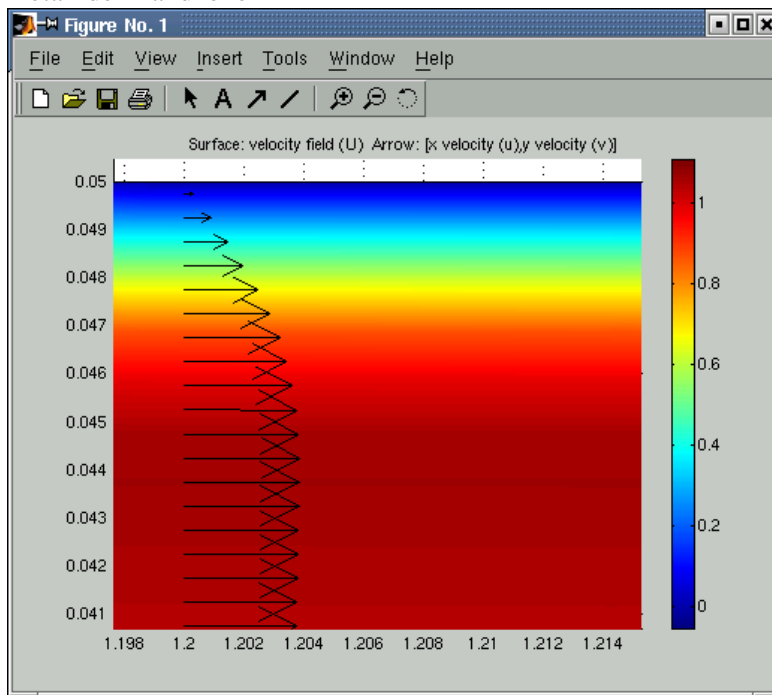
- weitere Verfeinerung des Gitters →
 - Rechenzeit von 12 Minuten
 - fast identische Ergebnisse
- Turbulente Strömung:
 - $Re = 100000$
 - gleiches Gitter wie eben → bricht ab mit "Stepsize too small"
 - Grundproblem: Randbereich ist sehr wichtig bei Turbulenz
 - wesentlich höhere Auflösung nur im Grenzbereich (7896 Elemente)



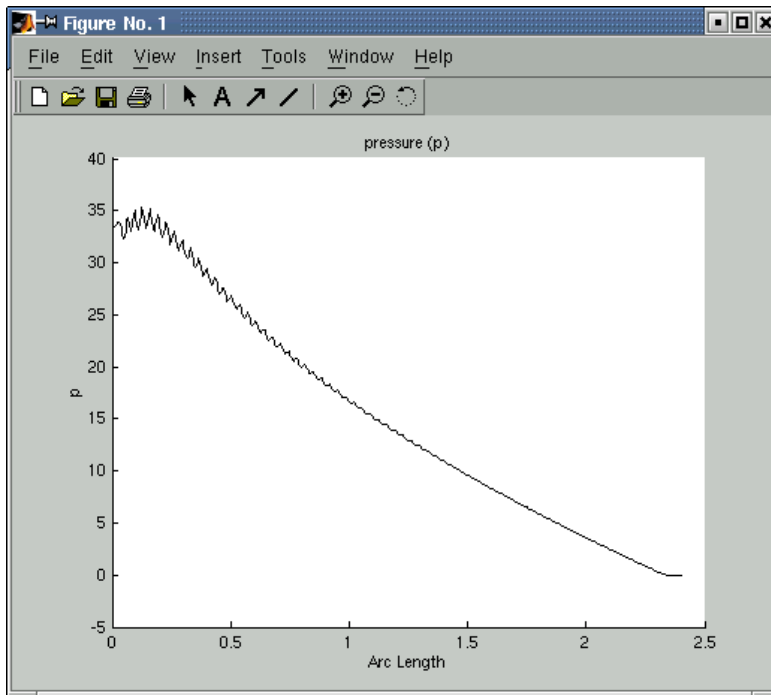
- damit Geschwindigkeitsverteilung wie bei hoher Turbulenz erwartet



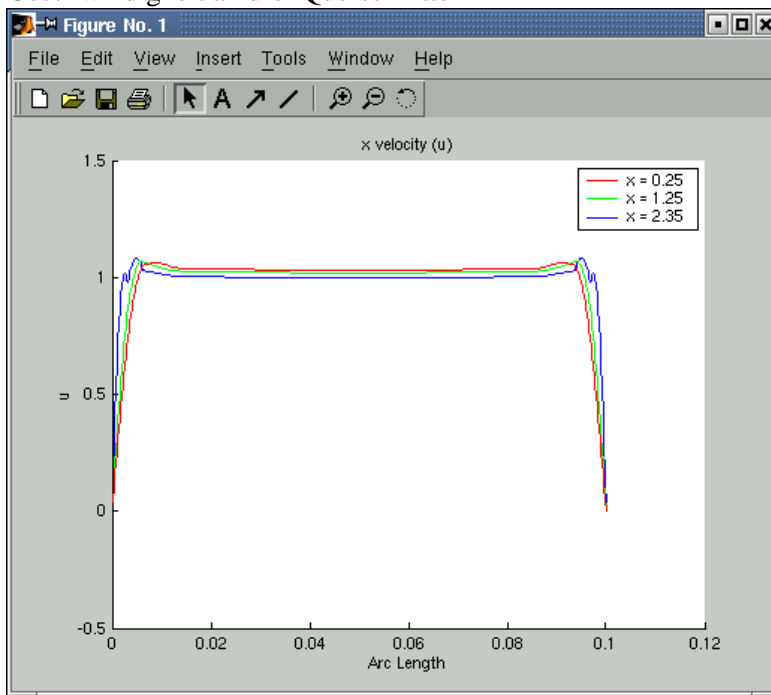
○ Detail der Randzone



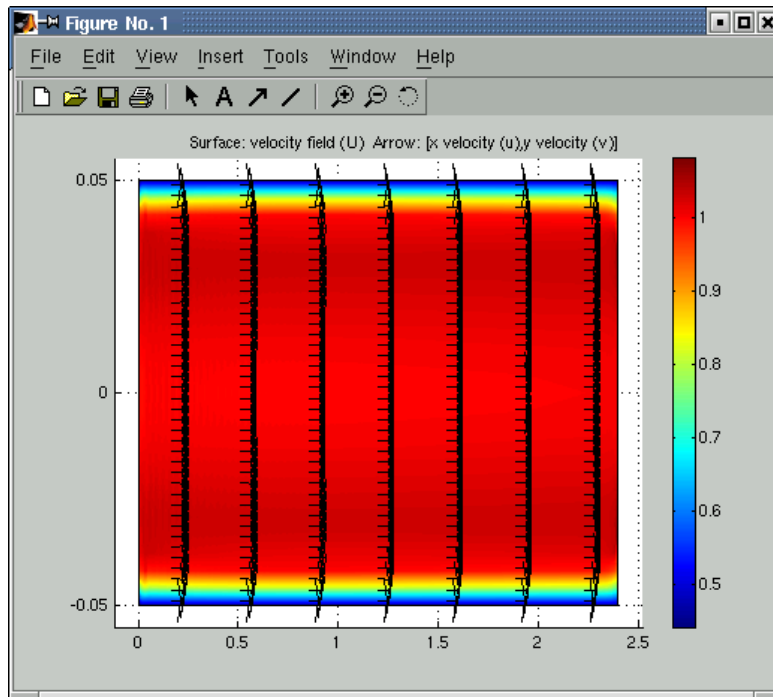
- bessere Darstellung mit Quer- und Längsschnitten
 - Druckverlauf längs des Rohrs



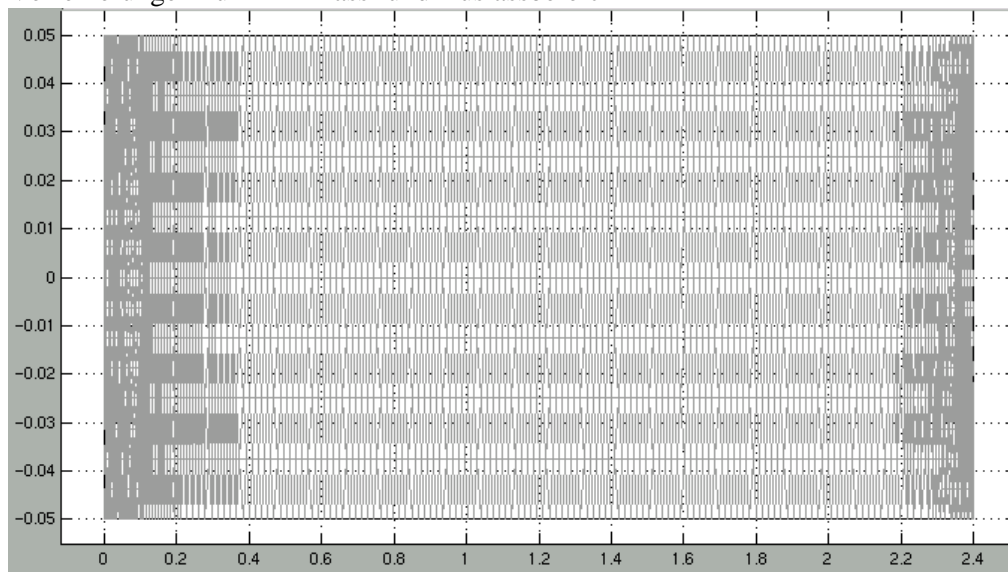
- Geschwindigkeit an drei Querschnitten



- Turbulent, mit adaptivem Solver:
 - Solver verfeinert Gitter selbsttätig an "kritischen Stellen"
 - Ergebnis bei normalem Gitter ohne Rand-Verfeinerung



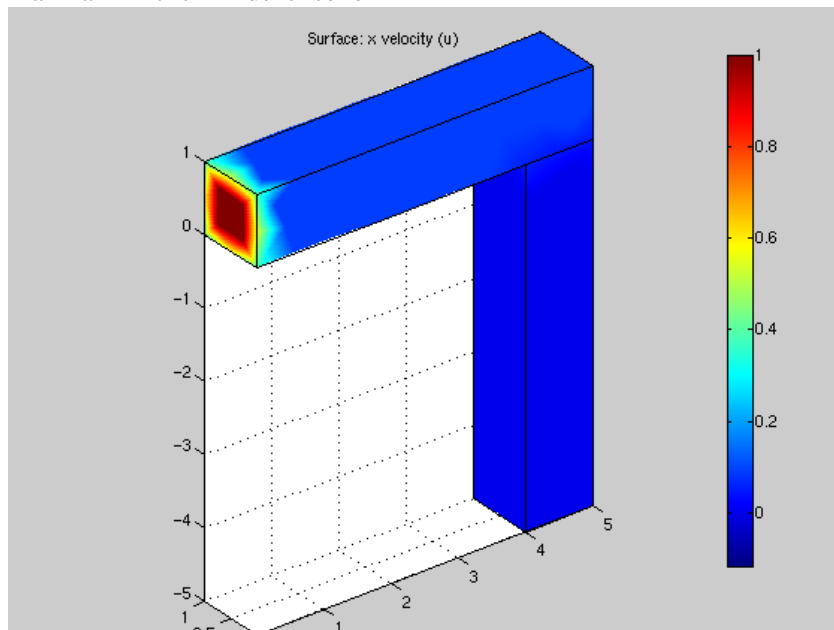
- berechnete Randschicht viel zu groß
- Verfeinerungen nur im Einlass- und Auslassbereich



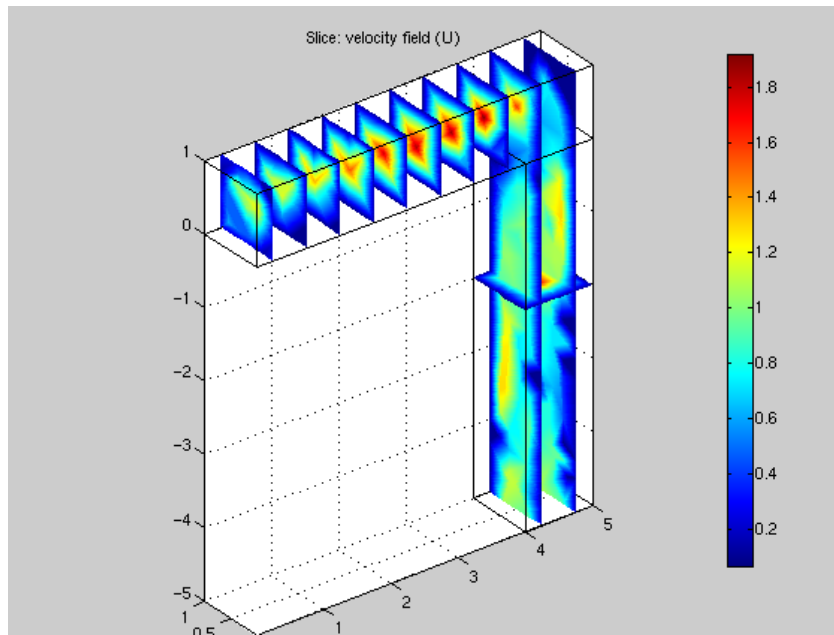
- Fazit:
 - Ergebnisse von Strömungsberechnungen müssen kritisch gesichtet werden
 - Rechnungen sinnlos ohne Kenntnisse des Benutzers

Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel

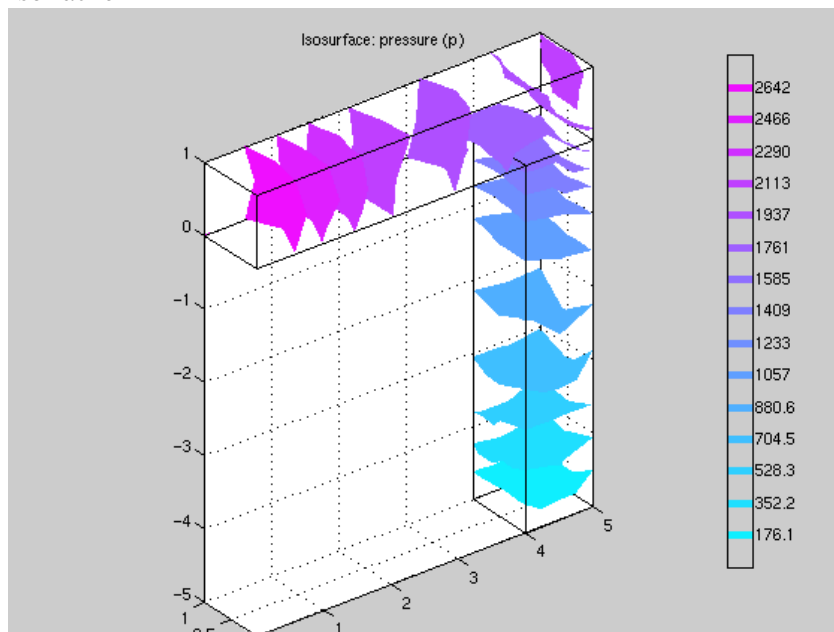
- Modell:
 - Strömung durch ein abgeknicktes Rohr mit quadratischem Querschnitt
 - turbulent ($Re = 50000$)
 - niedrige Auflösung
 - einfachstes Gitter (911 Elemente)
 - keine Randschichten modelliert
 - → konvergiert nicht
 - Ergebnisse sind höchstens grobe Näherung
- Darstellung der Daten (Visualisierung):
 - Grundproblem bei 3d
 - ganzer Raum voll Daten
 - man kann nicht "hindurchsehen"



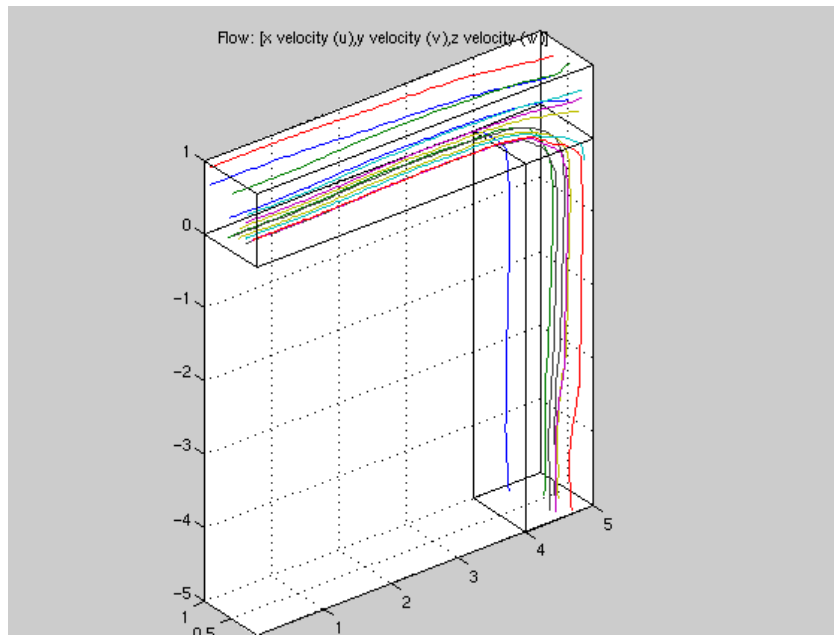
- viele Techniken, z.B.
 - Schnittebenen



- Isoflächen



- Stromlinien



- Aufgaben:
 - Aufgabe 6

Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6

Aufgabe 1

- Durch eine gut isolierte Dampfleitung von 1 km Länge und 15 cm Durchmesser strömen stündlich 30 t Dampf. Die Wandrauigkeit beträgt $k = 0.05$ mm. Wie groß ist der Druckverlust bei einem Anfangsdruck von 50 bar?
- Werte:
 - Anfangsdichte $\rho_1 = 16.4$ kg/m³
 - Viskosität $\eta_1 = 2.6 \cdot 10^{-5}$ Pa s
 - Adiabatenkoeffizient $\kappa = 1.28$
- Lösung

Aufgabe 2

- An einem Druckbehälter, in dem sich Luft unter einem Druck von 6 bar und einer Temperatur von 300 K befindet, ist eine Lavaldüse angeschlossen, deren kleinster Querschnitt 1 cm^2 beträgt. Der Außendruck betrage 1 bar.
 1. Wie groß ist der austretende Luftmassenstrom \dot{m} ?
 2. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit w_a ?
 3. Wie groß ist die Temperatur T_a ?
 4. Wie groß ist die Austrittsfläche A_a ?
- Werte:
 - $R_1 = 287.2 \text{ J/(kg K)}$ für Luft
- Lösung

Aufgabe 3

- Eine zweidimensionale Strömung w sei gegeben durch
 - $u(x,y) = -y$
 - $v(x,y) = x$
 1. Zeigen Sie, dass w die Kontinuitätsgleichung erfüllt.
 2. Benutzen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen, um den Druck in der Strömung (ohne äußere Kräfte) zu berechnen.
- Lösung

Aufgabe 4

- Berechnen Sie für die folgenden Strömungsfelder die Drehung ω und zeigen Sie, dass die Wirbeltransportgleichung erfüllt ist:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

-
- wobei
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
-
- Lösung

Aufgabe 5

- Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u' - u = 0$$

- $u(0) = 1$

- für das Intervall $[0, 1]$, indem Sie es in N gleiche Teile teilen und die FDM per Hand anwenden. Wählen Sie dazu explizit die Werte $N = 3, 6, 12$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.
- Lösung

Aufgabe 6

- Modellieren Sie die Umströmung eines Kreises in 2d (Zylinder-Umströmung) für die Reynoldszahlen $Re = 10, 30000, 3000000$.
- Stellen Sie jeweils die Geschwindigkeit und den Druck in der Strömung graphisch dar.
- Tip: Modellieren Sie die Außenwelt als ein großes Rechteck mit konstanter Anblas-Geschwindigkeit u .
- Lösung

Anhang

- Literatur
- Nachweise
- Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

Literatur

1. W.Bohl, Technische Strömungslehre
Vogel, 11. Aufl 1998, ISBN: 3-8023-1740-8
2. K.Gersten, Einführung in die Strömungsmechanik
Vieweg, 6. Aufl 1991, ISBN 3-528-43344-2
3. H. Oertel, Strömungsmechanik
Vieweg 1999, ISBN 3-528-03893-4
4. K.Gersten, H.Herwig: Strömungsmechanik
Vieweg 1992, ISBN 3-528-06472-2
5. H. Iben: Strömungslehre in Fragen und Aufgaben
Teubner 1997, ISBN: 3-8154-3033-X
6. Handbücher zu FEMLAB, Comsol AB, 2000

Nachweise

- Bilder:

Bild-Nr	Herkunft
71	[1]
69,70,73,75	[2]
80	[3]

Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

- Längs einer Bahnlinie verändert sich die Geschwindigkeit während der kleinen Zeit dt um

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t+dt) \\ v(t+dt) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(t) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \\ v(t) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x} u dt + \frac{\partial u}{\partial y} v dt \\ v(t) + \frac{\partial v}{\partial x} u dt + \frac{\partial v}{\partial y} v dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt & \frac{\partial u}{\partial y} dt \\ \frac{\partial v}{\partial x} dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: D\vec{w} \end{aligned}$$

-
- Die Matrix D wird zerlegt in eine Drehmatrix A und einen symmetrischen Anteil S gemäß
 - $D = A S$
- wobei

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt & 1 \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

-
- Anmerkung: Die Beziehung $D = A S$ gilt, wenn quadratische Terme in dt vernachlässigt werden.
- Die Matrix S kann als symmetrische Matrix diagonalisiert werden, sie hat reelle Eigenwerte. Sie entspricht damit einer lokalen Verzerrung (Stauchung bzw. Streckung) des Strömungsfelds.
- A kann als Drehmatrix geschrieben werden. Mit der Abkürzung

$$\omega := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

-
- gilt nämlich (in linearer Näherung in dt)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -\omega dt \\ \omega dt & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos(\omega dt) & -\sin(\omega dt) \\ \sin(\omega dt) & \cos(\omega dt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

-
- A beschreibt also eine Drehung um den kleinen Winkel ωdt . ω ist daher die lokale Winkelgeschwindigkeit der Drehung.

Lösung von Aufgabe 1

- Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A \bar{w}_1 = \rho \frac{\pi}{4} d_1^2 \bar{w}_1 \\ \Rightarrow \bar{w}_1 &= \frac{4 \dot{m}}{\pi d_1^2 \rho} = 28.75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- Kennzahlen:

$$\begin{aligned} \frac{k}{d} &= 3.33 \cdot 10^{-4} \\ \text{Re} &= \frac{\bar{w}_1 d}{\nu_1} = \frac{\bar{w}_1 d \rho_1}{\eta_1} = 2.72 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

- Rohrreibungszahl:

- $\text{Re } k/d = 907 \rightarrow$ Übergangsbereich
- Schätzwert aus dem Diagramm
 - $\lambda \approx 0.015$
- Iterieren mit der Formel von Colebrook \rightarrow
 - $\lambda = 0.0155$

- Druckverlust:

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} - 1 = -\frac{\kappa+1}{\kappa} \lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2d p_1} l = -0.250$$

$$\Rightarrow p_2 = 42.5 \text{ bar}$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = 7.5 \text{ bar}$$

Lösung von Aufgabe 2

1. Massenstrom \dot{m} :

- Da Druckunterschied größer als kritischer Wert, wird am kleinsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit erreicht. Dort gilt also

$$\begin{aligned}\dot{m} &= A_{\min} j^* \\ &= A_{\min} \frac{j^*}{\rho_0 w_{max}} \rho_0 w_{max} \\ &= A_{\min} 0.259 \rho_0 w_{max}\end{aligned}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R_i T_0} = 6.96 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$w_{max} = \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i T_0} = 776.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- $\Rightarrow \dot{m} = 0.140 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

2. Austrittsgeschwindigkeit w_a :

- $w_a = w_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}} = 491.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3. Austrittstemperatur T_a mit Energiesatz:

$$c_p T_0 = \frac{1}{2} w_a^2 + c_p T_a$$

- $\Rightarrow T_a = T_0 - \frac{w_a^2}{2c_p} = 179.8 \text{ K}$

4. Austrittsfläche aus Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m} = \rho_a w_a A_a$$

$$\rho_a = \frac{p_a}{R_i T_a} = 1.937 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- $\Rightarrow A_a = 1.47 \text{ cm}^2$

Lösung von Aufgabe 3

1. Einsetzen von u und v in KG ergibt sofort

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

2. Bestimmen des Drucks:

- Reibungsterme $\sim \eta$ verschwinden wegen

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

- u, v in NS1 einsetzen \rightarrow

- $\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho x = -\frac{\partial p}{\partial x}$

- $\Rightarrow p = \frac{1}{2}x^2 + C_1(y)$

- aus NS2 folgt

- $\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho y = -\frac{\partial p}{\partial y}$

- $\Rightarrow p = \frac{1}{2}y^2 + C_2(x)$

- beide Ausdrücke zusammen liefern

- $p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C = \frac{1}{2}r^2 + C$

- Druck nimmt mit Quadrat des Abstands vom Ursprung zu

Lösung von Aufgabe 4

- Aus der Definitionsgleichung

$$\circ \quad \omega := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- erhält man für die drei angegebenen Strömungen

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{r^3} - \left(-\frac{x^2}{r^3} \right) \right) = \frac{1}{2r}$$

$$\circ \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 - x^2}{r^4} - \frac{y^2 - x^2}{r^4} \right) = 0$$

- Einsetzen in die Wirbeltransportgleichung liefert bei \vec{w}_1 und \vec{w}_3 sofort 0, da die Ableitungen von ω bzw. ω selbst verschwinden.

- Für \vec{w}_2 erhält man

$$\circ \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{x}{2r^3} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{y}{2r^3}$$

- Damit

$$\circ \quad u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{(-1)}{2r^3} (-yx + xy) = 0$$

Lösung von Aufgabe 5

- Teilt man das Intervall $[0, 1]$ in N gleiche Teile, beträgt die Schrittweite
 - $h = 1/N$
- Die Gitterpunkte sind daher
 - $x_i = i/N, \quad i = 0 \dots N$
- Die Funktionswerte an den Gitterpunkten seien
 - $u(x_i) =: u_i, \quad i = 0 \dots N$
- Davon ist $u_0 = 1$ bekannt, die anderen N Werte gesucht.
- Die Ableitung wird gemäß der FDM genähert als

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_i &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \\ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{1/N} \\ &= N(u_{i+1} - u_i) \end{aligned}$$

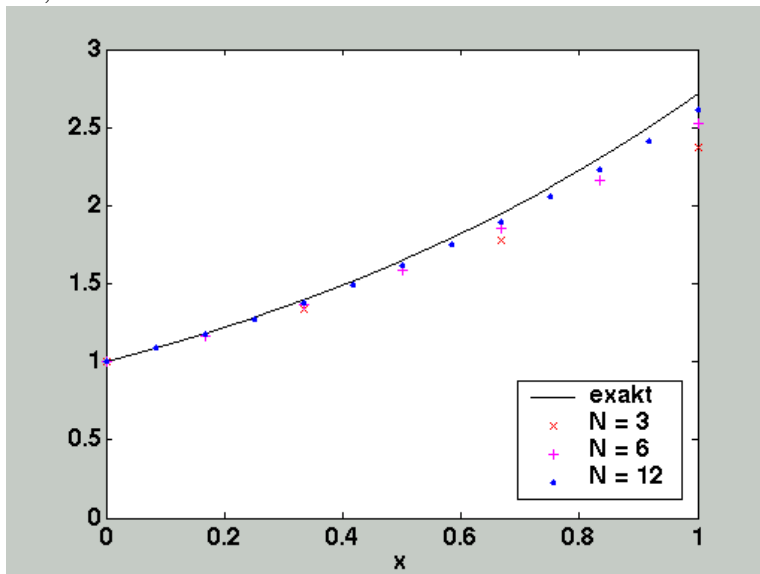
- Setzt man dies in die Differentialgleichung, ergibt sich

$$\begin{aligned} N(u_{i+1} - u_i) - u_i &= 0 \\ \Rightarrow u_{i+1} &= \left(1 + \frac{1}{N}\right) u_i \end{aligned}$$

- Diese Rekursion lässt sich direkt auflösen zu

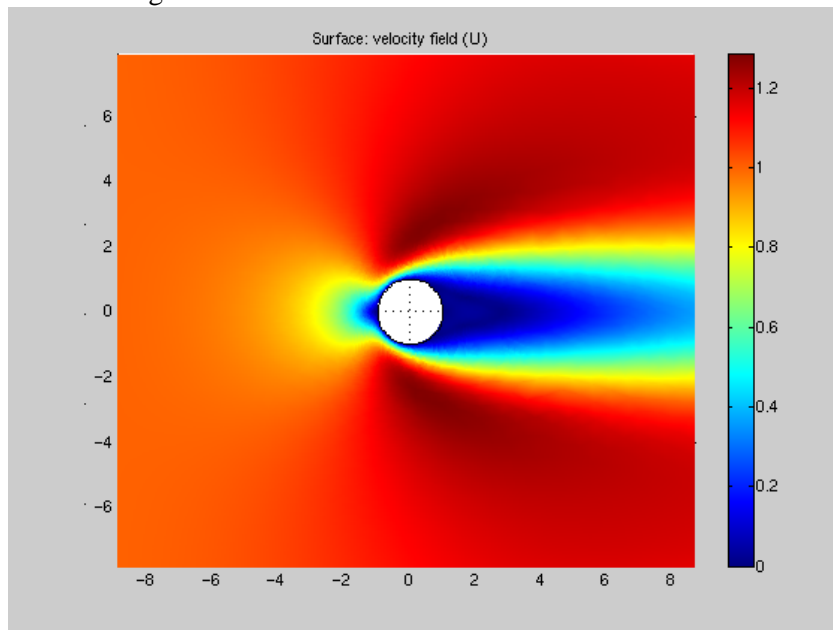
$$u_i = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^i u_0 = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^i$$

- Rechnet man diese Werte für $N = 3, 6, 12$ aus und trägt sie zusammen mit der exakten Lösung
 - $u(x) = e^x$
- auf, erhält man

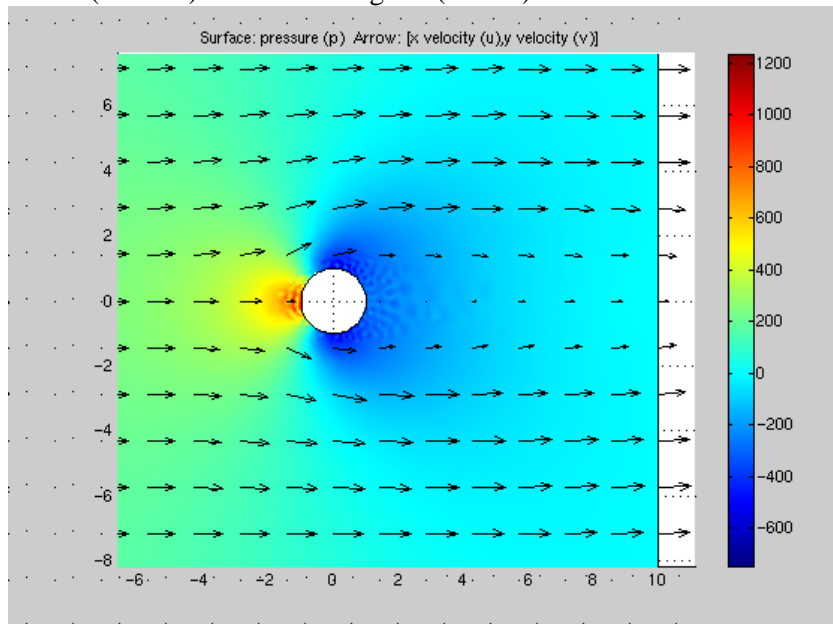


Lösung von Aufgabe 6

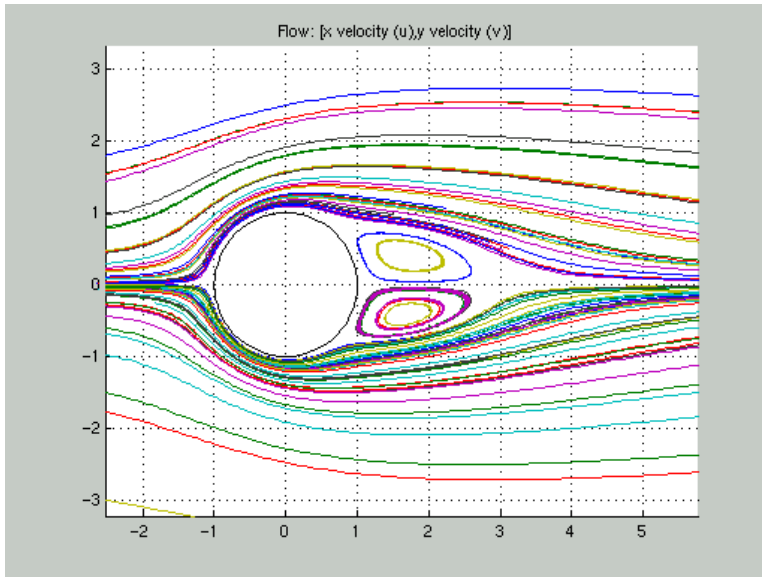
- Die folgenden Bilder zeigen exemplarisch einige Ergebnisse von Rechnungen mit z.T. sehr feinen Gittern (> 10000 Elemente) und entsprechenden Rechenzeiten von über einer Stunde. Trotzdem sind die Resultate nicht immer überzeugend (Schließen der Strömung im laminaren Fall, turbulente Grenzschicht bei sehr großer Reynoldszahl).
- $Re = 10$
 - Geschwindigkeitsfeld



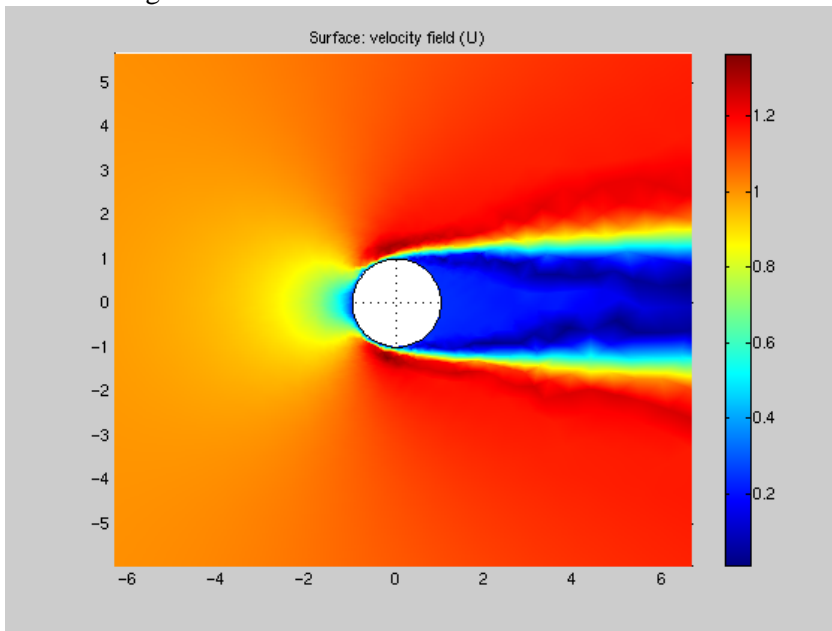
- Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



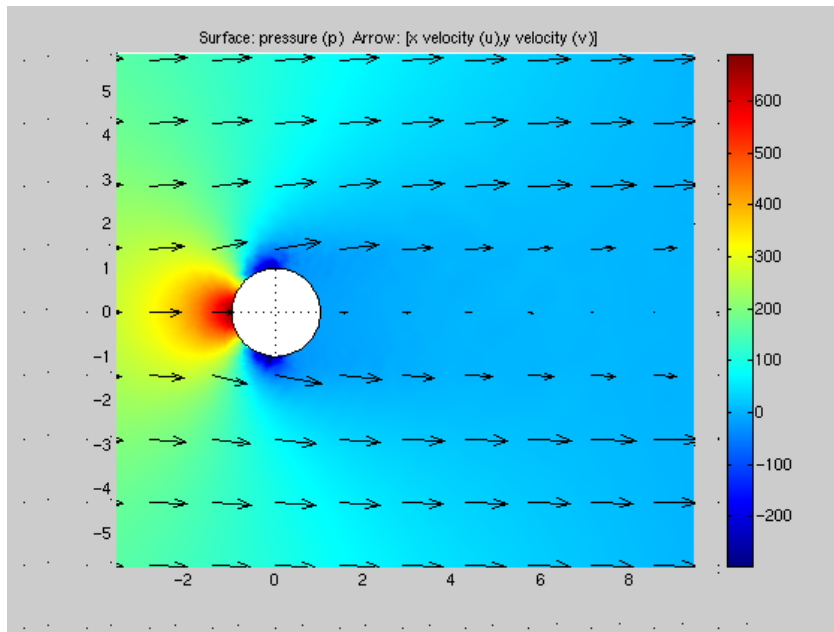
- Stromlinien



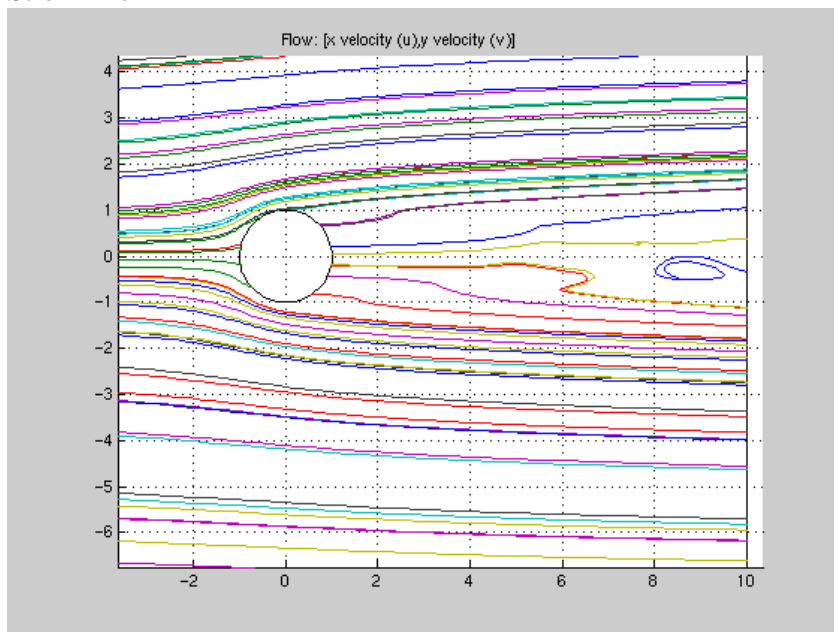
- $Re = 30000$
- Geschwindigkeitsfeld



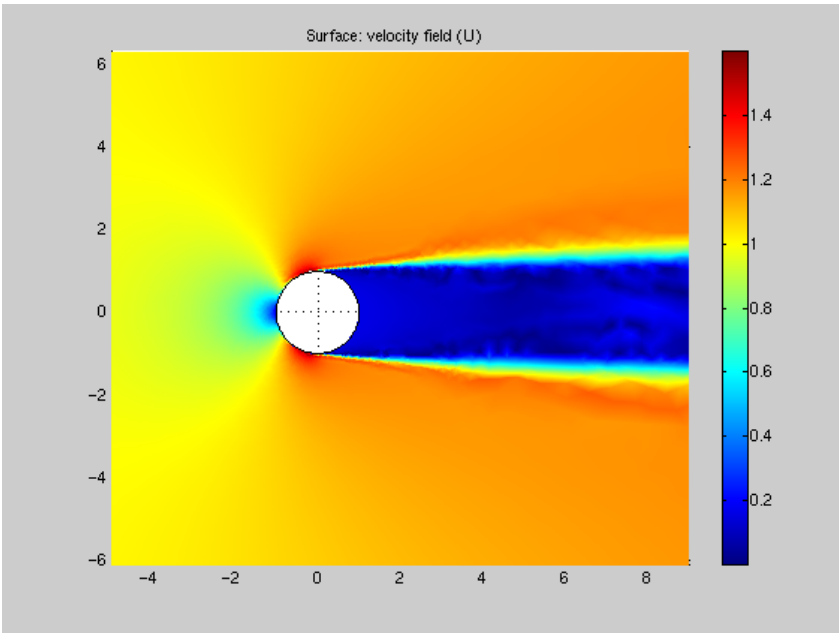
- Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



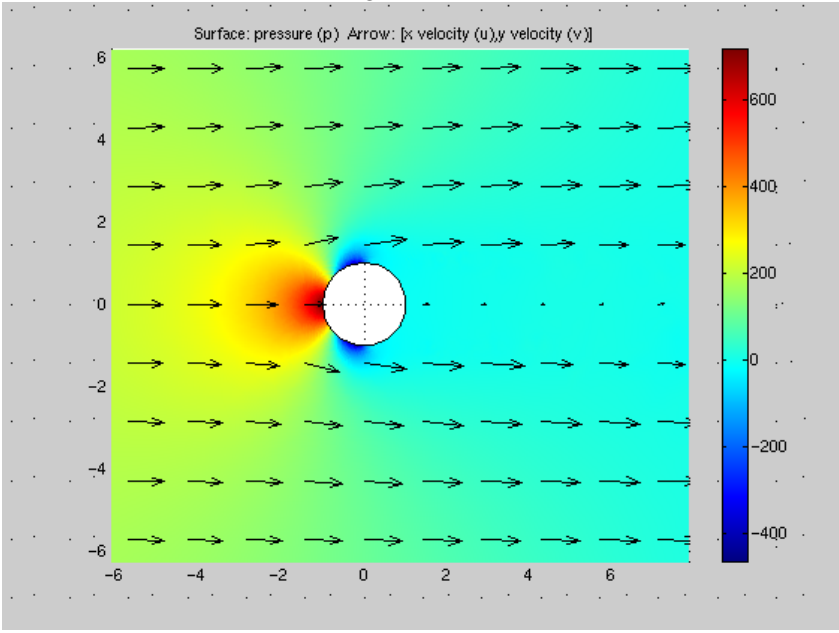
○ Stromlinien



- $Re = 3000000$
- Geschwindigkeitsfeld



○ Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



○ Stromlinien

